第 18 期《期末复习测试卷(一)》参考答案

一、选择题

1. C　2. A　3. D　4. C　5. D　6. C　7. B　8. C　9. A　10. B　11. A　12. B

提示：

1. 由 $M=\{-1,0\}$，$M\cup N=\{-1,0,1\}$ 得 N 中必含有 1，则 $N=\{1\},\{-1,1\},\{0,1\},\{-1,0,1\}$ 共 4 个.

3. 根据映射的定义加以判断，对于集合 A 中的任何元素，按照对应法则 f，在集合 B 中是否有唯一元素与之对应. 当 $x=4$ 时，$x^2-x+1=13\notin B$，$x+(x-1)^2=13\notin B$，当 $x=1$ 时，$2^{x-1}-1=2^0-1=0\notin B$，故 A、B、C 都不能构成从 A 到 B 的映射，对于 D，经验证，$x=1,2,3,4,5$ 时，2^x-1 的值分别为 1,3,7,15,31，又映射并不要求 B 中的任何元素都有原象.

4. 因为 $4^{0.9}=2^{1.8}$，$8^{0.48}=2^{1.44}$，$0.5^{-1.5}=2^{1.5}$，又 $y=2^x$ 是单调增函数，所以 $4^{0.9}>0.5^{-1.5}>8^{0.48}$.

5. $y=(\frac{1}{4})^x=2^{-2x}$ 向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位就得到 $y=2^{-2(x-\frac{1}{2})}=2^{1-2x}$.

6. 当 $a=0$ 时，显然符合题意，当 $a\neq 0$ 时，由题意 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=-3a^2-12a<0,\end{cases}$ 解得 $a\in(0,+\infty)$，综上得 $a\in[0,+\infty)$.

7. 画出函数 $y=a^{|x|}$ 与 $y=|\log_a x|$ 函数的图象易得.

8. $a_1+a_{11}=a_2+a_{10}=\cdots=a_5+a_7=2a_6$，可知 $a_6=0$，即有 $a_3+a_9=0$.

9. 当 $x\geqslant 0$ 时，得 $y=x^2+1$，$x\geqslant 0$ 的反函数为 $y=\sqrt{x-1}$，$x\geqslant 1$；
当 $x<0$ 时，得 $y=\frac{2}{x}$，$x<0$ 的反函数为 $y=\frac{2}{x}$，$x<0$；
故原函数的反函数为 $y=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x\geqslant 1,\\ \frac{2}{x}, & x<0.\end{cases}$

10. $a_na_{n-1}=a_{n-1}+(-1)^n(n\geqslant 2)$，$\therefore a_2a_1=a_1+1$，$\therefore a_2=2$，$a_3a_2=a_2-1$，$\therefore a_3=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{a_3}{a_2}=\frac{1}{4}$.

11. $a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，用裂项法求出该数列的前 n 项和 $S_n=\frac{2n}{n+1}$.

12. $y=[f(x)]^2+f(x^2)=[2+\log_3x]^2+2+\log_3x^2=(\log_3x)^2+6\log_3x+6=(\log_3x+3)^2-3$（$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 9,\\ 1\leqslant x^2\leqslant 9,\end{cases}$ 即 $1\leqslant x\leqslant 3$），
$\because \log_3x\in[0,1]$，$\therefore$ 当 $\log_3x=1$，即 $x=3$ 时，$y_{\max}=16-3=13$.

二、填空题

13. $(-\infty,-2]\cup[-1,+\infty)$　14. $(2,+\infty)$　15. 4096　16. $\{5\}$

提示：

13. 由题意得 $8-6(\frac{1}{2})^x+(\frac{1}{4})^x\geqslant 0\Rightarrow[(\frac{1}{2})^x-2][(\frac{1}{2})^x-4]\geqslant 0\Rightarrow(\frac{1}{2})^x\geqslant 4$ 或 $(\frac{1}{2})^x\leqslant 2\Rightarrow x\geqslant -1$ 或 $x\leqslant -2$.

14. 由题意只需求 $t=x^2-2x$ 的增区间且在定义域内即可.

15. 由 $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}(n\geqslant 2)$ 知 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 a_t,a_{2t},a_{3t},a_{4t} 也成等比数列，其公比 $q=8$，$a_{4t}=a_tq^3=4096$.

16. 数集 $\{2,3,5,7\}$ 的三元子集有 $\{7,5,3\}$、$\{7,5,2\}$、$\{7,3,2\}$、$\{5,3,2\}$，其“交替和”分别为 5、4、6，组成的数集为 $\{4,5,6\}$，与 $\{2,3,5,7\}$ 的交集为 $\{5\}$.

三、解答题

17. **解：** 假设存在，则由 $\begin{cases}y=x-2,\\ y=a(x^2-x+1)\end{cases}\Rightarrow ax^2-(a+1)x+a+2=0$，$\Delta\geqslant 0\Rightarrow -\frac{2\sqrt{3}+3}{3}\leqslant a\leqslant\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$，$\therefore a$ 是非零整数，$\therefore a=-2$ 或 -1. 当 $a=-2$ 时，解得 $x=0$ 或 $\frac{1}{2}$，不合题意；当 $a=-1$ 时，解得 $x=1$ 或 $x=-1$（舍去），当 $x=1$ 时，$y=-1$. $\therefore$ 存在 $a=-1$ 使 $A\cap B\neq\varnothing$，此时 $A\cap B=\{(1,-1)\}$.

18. **解：**（1）当 $a=2$ 时，$f(x)=\log_2(2x^2-2x)$，设 $u=2x^2-2x=2(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}$，则 $u\geqslant -\frac{1}{2}$，所以 $y=\log_2u\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$.

（2）设 $u(x)=ax^2-2x+4-2a$，若函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，则 $a>1$ 时，$u(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数且 $u(x)>0$，得 $\begin{cases}a>1,\\ \frac{1}{a}\leqslant 1,\\ u(1)=2-a\geqslant 0,\end{cases}$ 得 $1<a\leqslant 2$.
所以 a 的取值范围为 $(1,2]$.

19. **解：**（1）令 $x=y=1$，则 $f(1)=f(1)+f(1)$，$f(1)=0$.

（2）$\because f(-x)+f(3-x)\geqslant -2=-2f(\frac{1}{2})$，$\therefore f(-x)+f(\frac{1}{2})+f(3-x)+f(\frac{1}{2})\geqslant 0$，即 $f(-\frac{x}{2})+f(\frac{3-x}{2})\geqslant f(1)$，得 $f(-\frac{x}{2}\cdot\frac{3-x}{2})\geqslant f(1)$，

则 $\begin{cases}-\frac{x}{2}>0,\\ \frac{3-x}{2}>0,\\ -\frac{x}{2}\cdot\frac{3-x}{2}\geqslant 1,\end{cases}$ 解得 $x\leqslant -1$，$\therefore$ 原不等式的解集为 $(-\infty,-1]$.

20. **解：**（1）设电脑月租金为 x 元，当 $x\leqslant 100$ 时，有 $y=100x-6250>0$，可得 $62.5<x\leqslant 100$，$\therefore x\in\{70,80,90,100\}$. 当 $x>100$ 时闲置电脑数为 $(\frac{x-100}{10}\times 5)$ 台，每月收入为 $(100-\frac{x-100}{10}\times 5)x$，$\therefore y=(100-\frac{x-100}{10}\times 5)x-6250=-\frac{1}{2}x^2+150x-6250$. 由 $y>0$，$x>100$，解得 $100<x<250$，所以所求函数为 $y=\begin{cases}100x-6250, & x\in\{70,80,90,100\},\\ -\frac{1}{2}x^2+150x-6250, & 100<x<250 \text{ 且为 10 的倍数}.\end{cases}$

（2）若 $x\leqslant 100$，$y=100x-6250$ 是增函数，当 $x=100$ 时，$y_{\max}=100\times 100-6250=3750$ 元，若 $x>100$，$y=-\frac{1}{2}x^2+150x-6250=-\frac{1}{2}(x-150)^2+5000$，当 $x=150$ 时，$y_{\max}=5000$. 故每台电脑月租金为 150 元时，收入最大，最大收入为 5000 元.

21. **解：**（1）$\{a_n\}$ 为等差数列，$S_6=\frac{6(a_1+a_6)}{2}=66$，$\therefore a_1+a_6=22$，又 $a_1a_6=21$，$\therefore a_1,a_6$ 是二次方程 $x^2-22x+21=0$ 的两根，又 $d>0$，$\therefore a_1=1$，$a_6=21$，可解得 $d=4$. $\therefore$ 通项公式是 $a_n=4n-3$.

（2）由 $a_n=4n-3$ 得 $b_n=\frac{a_n+3}{4}\cdot 2^{\frac{a_n+3}{4}}=n\cdot 2^n$，$\therefore T_n=2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$，$2T_n=2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$，上两式相减得 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot 2^{n+1}=(1-n)\cdot 2^{n+1}-2$，
$\therefore T_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$.

22. （1）**证明：** 令 $g(x)=f(x)-x=ax^2+(b-1)x+1$，且 $a>0$. $\because x_1<1<x_2<2$，$\therefore (x_1-1)(x_2-1)<0$，即 $x_1x_2<(x_1+x_2)-1$，于是 $x=m=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}(-\frac{b-1}{a}-\frac{1}{a})=\frac{1}{2}(x_1+x_2)-\frac{1}{2}x_1x_2>\frac{1}{2}(x_1+x_2)-\frac{1}{2}[(x_1+x_2)-1]=\frac{1}{2}$. 又 $\because x_1<1<x_2<2$，$\therefore x_1x_2>x_1$. 于是有 $m=\frac{1}{2}(x_1+x_2)-\frac{1}{2}x_1x_2<\frac{1}{2}(x_1+x_2)-\frac{1}{2}x_1=\frac{1}{2}x_2<1$，$\therefore \frac{1}{2}<m<1$.

（2）**解：** 由方程 $g(x)=ax^2+(b-1)x+1=0$，可知 $x_1x_2=\frac{1}{a}>0$，$\therefore x_1,x_2$ 同号.

（i）若 $0<x_1<2$，则 $x_2-x_1=2$，$\therefore x_2=x_1+2>2$，$\therefore g(2)<0$，即 $4a+2b-1<0$ ①，又 $(x_2-x_1)^2=\frac{(b-1)^2}{a^2}-\frac{4}{a}=4$，$\therefore 2a+1=\sqrt{(b-1)^2+1}$，$(\because a>0)$，代入①式得 $2\sqrt{(b-1)^2+1}<3-2b$，解之得 $b<\frac{1}{4}$.

（ii）若 $-2<x_1<0$，则 $x_2=-2+x_1<-2$，$\therefore g(-2)<0$，即 $4a-2b+3<0$ ②，又 $2a+1=\sqrt{(b-1)^2+1}$，代入②得 $2\sqrt{(b-1)^2+1}<2b-1$，解得 $b>\frac{7}{4}$.

综上可知 b 的取值范围为 $\{b\,|\,b<\frac{1}{4}$，或 $b>\frac{7}{4}\}$.