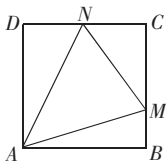


2012年全国中学生数学能力竞赛初三组(样题)

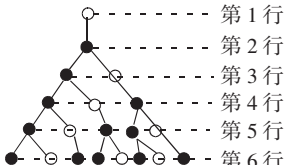
(试题总分:120分 答题时间:120分钟)

一、画龙点睛(本大题共8道小题,每小题3分,总计24分)

- 在实数范围内定义运算“ $\star$ ”,其规则为 $a \star b = a^2 - b^2 - b$,则方程 $(4 \star 3) \star x = 14$ 的解 $x =$ _____.
- 若一次函数 $y = kx + b$,当 $-3 \leq x \leq 1$ 时,对应的 y 值为 $1 \leq y \leq 9$,则一次函数的解析式为_____.
- 如图,正方形 $ABCD$ 的边长为1,点 M 、 N 分别为 BC 、 CD 上的动点,且满足 $\triangle CMN$ 的周长为2,则 $\angle MAN =$ _____度.



(第3题图)



(第8题图)

- 已知 α 是方程 $x^2 + x - \frac{1}{4} = 0$ 的根,则 $\frac{\alpha^3 - 1}{\alpha^5 + \alpha^4 - \alpha^3 - \alpha^2}$ 的值等于_____.
- 观察表一,寻找规律.表二、表三分别是表一中选取的一部分,则 $a + b$ 的值为_____.

0	1	2	3	...
1	3	5	7	...
2	5	8	11	...
3	7	11	15	...
...	...	...	...	...

表一

14
17
a

表二

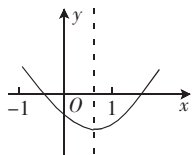
11	13
17	b

表三

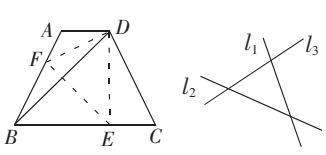
- 设 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边的长,化简 $\sqrt{(a-b-c)^2} + \sqrt{(b-c-a)^2} + \sqrt{(c-a-b)^2}$ 的结果是_____.
- 若干名游客在乘坐汽车,要求每辆汽车乘坐的人相等.如果每辆汽车乘28人,那么剩下一人未上车;如果减少一辆汽车,那么所有乘客正好能平均分乘到各辆汽车上.已知每辆汽车最多容纳35人,则有游客_____人.
- 如图,是一个树形图的生长过程,依据图中所示的生长规律,第15行的实心圆点的个数是_____个.

二、一锤定音(本大题共4道小题,每小题3分,总计12分)

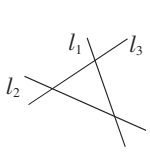
- 已知 $a = \sqrt{2} - 1, b = 2\sqrt{6} - 6, c = \sqrt{6} - 2$,则的 a, b, c 大小关系是().
A. $a < b < c$ B. $b < a < c$
C. $c < b < a$ D. $c < a < b$
- 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图,并设 $M = |a + b + c| - |a - b + c| + |2a + b| - |2a - b|$,则().
A. $M > 0$ B. $M = 0$
C. $M < 0$ D. M 的符号不确定



(第10题图)



(第11题图)



(第12题图)

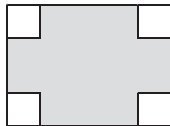
- 如图,等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, \angle DBC = 45^\circ$,翻折梯形 $ABCD$,使点 B 重合于点 D ,折痕分别交边 AB 、 BC 于点 F 、 E .若 $AD = 2, BC = 8$,则 $\angle CDE$ 的正切值等于().
A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$
- 如图,直线 l_1, l_2, l_3 表示三条相互交叉的公路,现要建一个货物中转站,要求它到三条公路的距离相等,则可供选择的地址有().
A. 1处 B. 2处 C. 3处 D. 4处

三、妙笔生花(本大题共4道小题,13题6分,14题7分,15题8分,16题9分,总计30分)

- 你能用所学知识解方程 $2x^2 + 5|x| - 12 = 0$ 吗?请试一试.

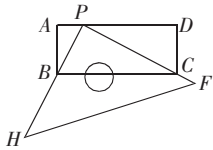
- 已知 $abc \neq 0$,并且 $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = p$,那么直线 $y = px + p$ 一定通过哪几个象限?

- 如图,在长为10 cm,宽为8 cm的矩形的四个角上截去四个完全相同的小正方形,使得留下的图形(图中阴影部分)面积是原矩形面积的80%,求所截去小正方形的边长.



(第15题图)

- 如图,有一块塑料矩形模板 $ABCD, AD = 10$ cm, $AB = 4$ cm,将你手中足够大的直角三角板 PHF 的直角顶点 P 落在 AD 边上(不与 A, D 重合),移动三角板,使其顶点 P 在 AD 上运动.请问:能否使三角板两直角边分别通过点 B 与点 C ?若能,请求出此时 AP 的长;若不能,请说明理由.

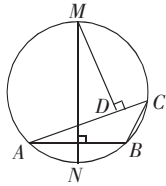


(第16题图)

四、一鼓作气(本大题共2道小题,17题12分,18题12分,总计24分)

- 法庭正在审理一件刑事案件,犯罪嫌疑人的辩护律师向控方证人——一位警长发问.
“警长先生,”律师问道,“你说,被告从你面前跑了27步后,你才开始追他的?”
“是的,先生.”警长答道.
“在追捕中,你发现他每跑8步,而你只能跑5步.”
“是这样的.”
“那么,根据你的说法,你怎么抓到他的呢?”
“那是因为我的步子比较长.我跑两步的距离等于犯罪嫌疑人跑5步的距离.”警长答道.
你知道警长跑了多少步才把犯罪嫌疑人抓到的吗?

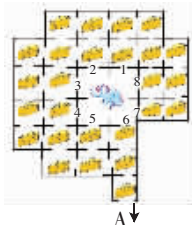
- 已知:如图,在 $\triangle ABC$ 中, D 为 AC 边上一点,且 $AD = DC + CB$.过 D 作 AC 的垂线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 M ,过 M 作 AB 的垂线 MN ,交圆于 N .求证: MN 为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径.



(第18题图)

五、再接再厉(本大题总计15分)

- 如图,每间房里都有一块点心.一只贪心的老鼠想一次吃完所有的点心后,从A门出来.请问这只老鼠从1~8中的哪扇门进去,才不走重复路线(每间房只允许进出各一次,并且不允许从同一扇门进出)?它应该怎样走?(用粗线在图中画出这只老鼠所走的路线图)



(第19题图)

六、马到成功(本大题总计15分)

- 话说在远方的一个岛上,住着两个民族,一个是诚实族,一个是说谎族.顾名思义,说谎族在说话或回答问题时总是说谎话,诚实族在说话或回答问题时则全是说实话.某记者在此岛上遇到了四个岛民,记者照例对他们进行了访问:“你们都是什么族的?诚实族的还是说谎族的?”这四人的回答如下:
第一个人说:“我们四人全都是说谎族的.”
第二个人说:“我们四人之中只有一人是说谎族的.”
第三个人说:“我们四人之中有两人是说谎族的.”
第四个人说:“我是诚实族的.”
试问第四个人是否真的是诚实族的?请说明你判断的理由.

(参考答案见D4版)

《2012 年全国中学生数学能力竞赛初三组(样题)》参考答案

一、画龙点睛

1. 1 或-2 2. $y = 2x + 7$ 或 $y = -2x + 3$ 3. 45 4. 20
5. 40 6. $a + b + c$ 7. 841 8. 377

二、一锤定音

9. B 10. C 11. A 12. D

三、妙笔生花

13. 当 $x \geq 0$ 时, 原方程可化为 $2x^2 + 5x - 12 = 0$, 解得 $x = \frac{3}{2}$ (负值舍去); 当 $x < 0$ 时, 原方程可化为 $2x^2 - 5x - 12 = 0$, 解得 $x = -\frac{3}{2}$ (正值舍去), 因此原方程的解为 $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}$.

14. 由已知, 得 $\begin{cases} a + b = pc, \\ b + c = pa, \\ a + c = pb. \end{cases}$ 三式相加, 得 $2(a + b + c) = p(a + b + c)$. 所以有 $p = 2$ 或 $a + b + c = 0$.
当 $p = 2$ 时, $y = 2x + 2$, 则直线通过第一、二、三象限;
当 $a + b + c = 0$ 时, 不妨取 $a + b = -c$, 于是 $p = \frac{a + b}{c} = -1 (c \neq 0)$, 所以 $y = -x - 1$,

则直线通过第二、三、四象限.
综合上述两种情况, 直线一定通过第二、三象限.

15. 设截去小正方形的边长为 x cm.
根据题意, 得 $10 \times 8 - 4x^2 = 80\% \times 10 \times 8$.
整理, 得 $x^2 = 4$. 解得 $x_1 = 2, x_2 = -2$ (舍去).
即所截去小正方形的边长为 2 cm.
16. 能使三角板两直角边分别通过点 B 与点 C .
设 AP 的长为 x cm, 则 $PD = (10 - x)$ cm.
在 Rt $\triangle ABP$ 和 Rt $\triangle PDC$ 中, $PB^2 = AP^2 + AB^2 = x^2 + 4^2, PC^2 = PD^2 + CD^2 = (10 - x)^2 + 4^2$.
而在 Rt $\triangle BPC$ 中, $PB^2 + PC^2 = BC^2$, 则 $x^2 + 4^2 + (10 - x)^2 + 4^2 = 10^2$. 整理, 得 $x^2 - 10x + 16 = 0$. 解得 $x_1 = 2, x_2 = 8$. 所以 AP 的长为 2 cm 或 8 cm.

四、一鼓作气

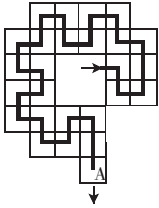
17. 设警长跑了 x 步才把犯罪嫌疑人抓到, 而在这一

时段内, 犯罪嫌疑人跑了 y 步, 根据题意, 从跑的步数来看, 有 $\frac{y}{x} = \frac{8}{5}$ (1). 另一方面, 对于同一段距离, 犯罪嫌疑人一共跑了 $27 + y$ 步, 警长一共跑了 x 步, 根据题意, 犯罪嫌疑人跑 5 步的距离与警长跑两步的距离相同, 因此有 $\frac{y + 27}{x} = \frac{5}{2}$ (2). 联合 (1)(2), 得 $x = 30, y = 48$. 即警长跑了 30 步才把犯罪嫌疑人抓到.
18. 延长 AC 至 E , 使 $CE = BC$, 连接 MA 、 MB 、 ME 、 BE .
 $\because AD = DC + CB = DC + CE = DE$, 且 $MD \perp AE$, 则 $MA = ME$, $\therefore \angle MAE = \angle MEA$. 又 $\angle MAE = \angle MBC$, $\therefore \angle MEA = \angle MBC$. $\because CE = BC$, $\therefore \angle CEB = \angle CBE$, 则 $\angle MEA + \angle CEB = \angle MBC + \angle CBE$, 即 $\angle MEB = \angle MBE$. $\therefore ME = MB$. 又 $ME = MA$, $\therefore MA = MB$.

$\therefore M$ 为优弧 $\widehat{AB}$ 的中点.
又 $\because MN \perp AB$, $\therefore MN$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径.

五、再接再厉

19. 老鼠应该从第 8 扇门进去, 其路线图如右图所示.



六、马到成功

20. 由第一个人的回答可得出如下判断:
①四个人中一定有诚实族的人; ②第一人是说谎族的. (因为如果四个人全是说谎族的, 那么谁也不会说“我们四个人全都是说谎族的”)
由第二、第三人的回答可得出如下判断:
③第二人是说谎族的.
因为如果他说真话, 则第二、第三和第四人应是诚实族的, 但第二和第三人的回答是相矛盾的, 故第二人必是说谎族的.
对于第三人, 若他是说谎族的, 则由①、②和③知, 第四人必是诚实族的; 若他是诚实族的, 即他说真话, 则第三、第四两人必是诚实族的.
因此第四人是诚实族的.