# 2012年全国中学生数学能力竞赛高三组(样题)

满分:150分　　时间:120分钟

## 基础能力部分(共60分,每题5分)

### 一、运算求解能力

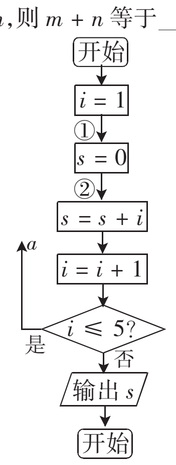
1. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)=\frac{1}{4}$,$\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,则 $2\sin^2\alpha+\tan\alpha-\cot\alpha-1$ 的值为________.

2. 一盒中装有分别标记着1,2,3,4的4个小球,每次从袋中取出一只球,设每只小球被取出的可能性相同.若每次取出的球不放回盒中,现连续取三次球,求恰好第三次取出的球的标号为3次中最大数字的球的概率是________.

3. 已知等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前$n$项和分别为$A_n$和$B_n$,且$\frac{A_n}{B_n}=\frac{7n+41}{n+3}$,则使得$\frac{a_n}{b_n}$为整数的正整数$n$的个数是________.

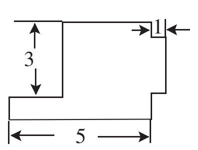
### 二、数据处理能力

4. 已知如图所示的程序框图(未完成),设当箭头$a$指向①时,输出的结果为$s=m$,当箭头$a$指向②时,输出的结果为$s=n$,则$m+n$等于________.

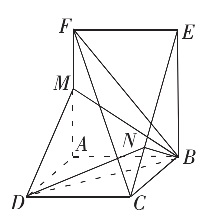



### 三、空间想象能力

5. 如图为一个无盖长方体盒子的展开图(重叠部分不计),尺寸如图所示(单位:cm),则这个长方体的对角线长为________cm.




(第5题图)




(第6题图)

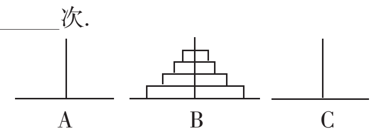
6. 已知如图几何体,正方形$ABCD$和矩形$ABEF$所在平面互相垂直,$AF=2AB=2AD$,$M$为$AF$的中点,$BN\perp CE$.则二面角$M-BD-N$的大小为________.

### 四、抽象概括能力

7. 设定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$同时满足以下三个条件:①$f(x)+f(-x)=0$;②$f(x+2)=f(x)$;③当$0<x<1$时,$f(x)=\frac{x}{2}$,则$f\left(\frac{3}{2}\right)=$________.

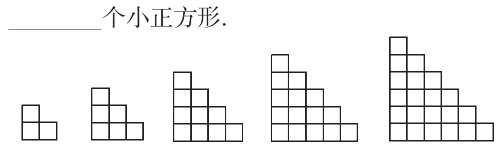
### 五、推理论证能力

8. 如图,汉诺塔问题是指有3根杆子$A$、$B$、$C$,$B$杆上有若干碟子,把所有碟子从$B$杆移到$A$杆上,每次只能移动一个碟子,大的碟子不能叠在小的碟子上面.把$B$杆上的4个碟子全部移到$A$杆上,最少需要移动________次.




(第8题图)

9. 观察下列图形中小正方形的个数,则第$n$个图中有________个小正方形.



(第9题图)

### 六、实践能力

10. 某蔬菜收购点租用车辆,将100吨新鲜黄瓜运往某市销售,可供租用的大卡车和农用车分别为10辆和20辆,若每辆卡车载重8吨,运费960元,每辆农用车载重2.5吨,运费360元,问全部运完黄瓜时最低运费为________元.

### 七、创新意识

11. 如果一条直线与一个平面垂直,那么,称此直线与平面构成一个"正交线面对".在一个正方体中,由两个顶点确定的直线与含有四个顶点的平面构成的"正交线面对"的个数是________.

12. 在平面直角坐标系中,若点$A$、$B$同时满足:①点$A$、$B$都在函数$y=f(x)$图象上;②点$A$、$B$关于原点对称,则称点对$(A,B)$是函数$y=f(x)$的一个"姐妹点对"(规定点对$(A,B)$与点对$(B,A)$是同一个"姐妹点对").那么函数$f(x)=\begin{cases}x-4,x\geqslant 0,\\ x^2-2x,x<0,\end{cases}$的"姐妹点对"的个数为________.

## 综合能力部分(共90分)

13. (10分)某产品按行业生产标准分成8个等级,等级系数$\xi$依次为$1,2,\cdots 8$,其中$\xi\geqslant 5$为标准$A$,$\xi\geqslant 3$为标准$B$,产品的等级系数越大表明产品的质量越好.已知某厂执行标准$B$生产该产品,且该厂的产品都符合相应的执行标准.从该厂生产的产品中随机抽取30件,相应的等级系数组成一个样本,数据如下:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 3 | 3 | 8 | 5 | 5 | 6 | 3 | 4 |
| 6 | 3 | 4 | 7 | 5 | 3 | 4 | 8 | 5 | 3 |
| 8 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 | 7 | 5 | 6 | 7 |

该行业规定产品的等级系数$\xi\geqslant 7$的为一等品,等级系数$5\leqslant\xi<7$的为二等品,等级系数$3\leqslant\xi<5$的为三等品.

(1)试分别估计该厂生产的产品的一等品率、二等品率和三等品率;

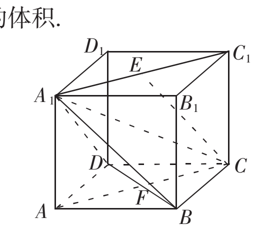
(2)从样本的一等品中随机抽取2件,求所抽得2件产品等级系数都是8的概率.

14. (12分)在棱长为$a$的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,$E$是线段$A_1C_1$的中点,底面$ABCD$的中心是$F$.

(1)求证:$CE\perp BD$;

(2)求证:$CE\parallel$平面$A_1BD$;

(3)求三棱锥$D-A_1BC$的体积.




(第14题图)

15. (12分)在$\triangle ABC$中,角$A$、$B$、$C$的对边分别为$a$、$b$、$c$,若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=k(k\in\mathbf{R})$.

(1)判断$\triangle ABC$的形状;

(2)若$c=\sqrt{2}$,求$k$的值.

16. (16分)对于函数$f(x)$,若存在$x_0\in\mathbf{R}$,使$f(x_0)=x_0$成立,则称$x_0$为$f(x)$的不动点.已知函数$f(x)=ax^2+(b+1)x+(b-1)(a\neq 0)$.

(1)当$a=1$,$b=-2$时,求函数$f(x)$的不动点;

(2)若对任意实数$b$,函数$f(x)$恒有两个相异的不动点,求$a$的取值范围;

(3)在(2)的条件下,若$y=f(x)$图象上$A$、$B$两点的横坐标是函数$f(x)$的不动点,且$A$、$B$两点关于直线$y=kx+\frac{1}{2a^2+1}$对称,求$b$的最小值.

17. (20分)已知等差数列$\{a_n\}$的首项为$a$,公差为$b$;等比数列$\{b_n\}$的首项为$b$,公比为$a$,其中$a,b\in\mathbf{N}_+$,且$a_1<b_1<a_2<b_2<a_3$.

(1)求$a$的值;

(2)若对于任意$n\in\mathbf{N}_+$,总存在$m\in\mathbf{N}_+$,使$a_m+3=b_n$,求$b$的值;

(3)在(2)中,记$\{c_n\}$是所有$\{a_n\}$中满足$a_m+3=b_n$,$m\in\mathbf{N}_+$的项从小到大依次组成的数列,又记$S_n$为$\{c_n\}$的前$n$项和,$T_n$为$\{a_n\}$的前$n$项和,求证:$S_n\geqslant T_n(n\in\mathbf{N}_+)$.

18. (20分)已知椭圆$E$经过点$A(2,3)$,对称轴为坐标轴,焦点$F_1,F_2$在$x$轴上,离心率$e=\frac{1}{2}$.

(1)求椭圆$E$的方程;

(2)求$\angle F_1AF_2$的平分线所在直线$l$的方程;

(3)在椭圆$E$上是否存在关于直线$l$对称的相异两点?若存在,请找出;若不存在,说明理由.

# 2012年全国中学生数学能力竞赛高三组(样题)参考答案

## 基础能力部分

1. $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ **解析:** 由 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+4\alpha\right)=\frac{1}{2}\cos 4\alpha=\frac{1}{4}$,得 $\cos 4\alpha=\frac{1}{2}$.又 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\alpha=\frac{5\pi}{12}$. 于是 $2\sin^2\alpha+\tan\alpha-\cot\alpha-1=-\cos 2\alpha+\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=-\cos 2\alpha+\frac{-2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=-\left(\cos\frac{5\pi}{6}+2\cot\frac{5\pi}{6}\right)=-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{3}\right)=\frac{5}{2}\sqrt{3}$

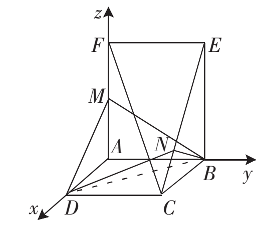
2. $\frac{1}{3}$

3. 3

4. 20

5. $\sqrt{14}$

6. 90° **解析:** 因为正方形$ABCD$和矩形$ABEF$所在平面互相垂直,所以$AF\perp$平面$ABCD$.
以$A$为原点,以$AD,AB,AF$为$x,y,z$轴建立空间直角坐标系,如图取$AB=1$




$C(1,1,0)$,$M(0,0,1)$,$B(0,1,0)$,$D(1,0,0)$,$N\left(\frac{4}{5},1,\frac{2}{5}\right)$

设平面$BDM$的法向量为$\boldsymbol{p}=(x,y,z)$,

$\begin{cases}\boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}$ $\boldsymbol{p}=(1,1,1)$

设平面$BDN$的法向量为$\boldsymbol{q}=(x,y,z)$,

$\begin{cases}\boldsymbol{q}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \boldsymbol{q}\cdot\overrightarrow{BN}=0\end{cases}$ $\boldsymbol{q}=(1,1,-2)$

$\boldsymbol{p}$与$\boldsymbol{q}$有夹角为$\theta$

$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{p}|\cdot|\boldsymbol{q}|}=0$

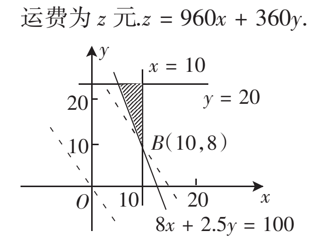
所以二面角$M-BD-N$的大小为90°.

7. $-\frac{1}{4}$

8. 15

9. $\frac{n^2+3n+2}{2}$

10. 12480 **解析:** 设租用大卡车$x$辆,农用车$y$辆,最低运费为$z$元.$z=960x+360y$.




线性约束条件是:$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 10\\ 0\leqslant y\leqslant 20\\ 8x+2.5y\geqslant 100\end{cases}$

作出可行域.

由$\begin{cases}8x+2.5y=100\\ x=10\end{cases}$得$B(10,8)$

作直线$960x+360y=0$.

即$8x+3y=0$,向上平移至过点$B(10,8)$时,$z=960x+360y$取到最小值.

$z_{最小}=960\times 10+360\times 8=12480$

11. 36个 **解析:** 正方体中,一个面有四条棱与之垂直,六个面,共构成24个"正交线面对";而正方体的六个对角截面中,每个对角面又有两条面对角线与之垂直,共构成12个"正交线面对",所以共有36个"正交线面对".

12. 1

## 综合能力部分

13. **解析:** (1)由样本数据知,30件产品中,一等品有6件,二等品有9件,三等品有15件.

$\therefore$ 样本中一等品的频率为$\frac{6}{30}=0.2$,故估计该厂生产的产品的一等品率为0.2;二等品的频率为$\frac{9}{30}=0.3$,故估计该厂产品的二等品率为0.3;三等品的频率为$\frac{15}{30}=0.5$,故估计该厂产品的三等品率为0.5.

(2)样本中一等品有6件,其中等级系数为7的有3件,等级系数为8的也有3件,

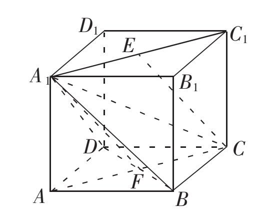
记等级系数为7的3件产品分别为$C_1$、$C_2$、$C_3$,等级系数为8的3件产品分别为$P_1$、$P_2$、$P_3$,则从样本的一等品中随机抽取2件的所有可能为:$(C_1,C_2)$,$(C_1,C_3)$,$(C_1,P_1)$,$(C_1,P_2)$,$(C_1,P_3)$,$(C_2,C_3)$,$(C_2,P_1)$,$(C_2,P_2)$,$(C_2,P_3)$,$(C_3,P_1)$,$(C_3,P_2)$,$(C_3,P_3)$,$(P_1,P_2)$,$(P_1,P_3)$,$(P_2,P_3)$共15种.

记从"一等品中随机抽取2件,2件等级系数都是8"为事件$A$,则$A$包含的基本事件有$(P_1,P_2)$,$(P_1,P_3)$,$(P_2,P_3)$共3种,故所求的概率$P(A)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

14. **解析:** (1)证明:根据正方体的性质$BD\perp AC$,

因为$AA_1\perp$平面$ABCD$,$BD\subset$平面$ABCD$,所以$BD\perp AA_1$,又$AC\cap AA_1=A$

所以$BD\perp$平面$ACC_1A_1$,$CE\subset$平面$ACC_1A_1$,所以$CE\perp BD$.




(2)证明:连接$A_1F$,因为$AA_1\parallel BB_1\parallel CC_1$,$AA_1=BB_1=CC_1$,所以$ACC_1A_1$为平行四边形,因此$A_1C_1\parallel AC$,$A_1C_1=AC$.由于$E$是线段$A_1C_1$的中点,所以$CE\parallel FA_1$

因为$FA_1\subset$面$A_1BD$,$CE\not\subset$平面$A_1BD$,

所以$CE\parallel$平面$A_1BD$.

(3)$V_{D-A_1BC}=V_{A_1-BCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BCD}\cdot A_1A=\frac{a^3}{6}$

15. **解析:** (1)$\because\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=cb\cos A$,$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=ca\cos B$

又$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

$\therefore bc\cos A=ac\cos B$

$\therefore\sin B\cos A=\sin A\cos B$

即$\sin A\cos B-\sin B\cos A=0$

$\therefore\sin(A-B)=0$

$\because -\pi<A-B<\pi$

$\therefore A=B$

$\therefore\triangle ABC$为等腰三角形.

(2)由(1)知$a=b$

$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A=bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c^2}{2}=k$

$\because c=\sqrt{2}$,$\therefore k=1$

16. **解析:** (1)$f(x)=x^2-x-3$,因为$x_0$为不动点,因此有$f(x_0)=x_0^2-x_0-3=x_0$,

所以$x_0=-1$或$x_0=3$,即3和$-1$为$f(x)$的不动点.

(2)因为$f(x)$恒有两个不动点,$f(x)=ax^2+(b+1)x+(b-1)=x$,

即$f(x)=ax^2+bx+(b-1)=0$,由题设$b^2-4a(b-1)>0$恒成立,即对任意$b\in\mathbf{R}$,$b^2-4ab+4a>0$恒成立,所以$(4a)^2-4(4a)<0\Rightarrow a^2-a<0$,所以$0<a<1$.

(3)由$ax^2+bx+(b-1)=0$,得$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$,由题设$k=-1$,即$y=-x+\frac{1}{2a^2+1}$,

设$A,B$的中点为$E$,则$E\left(-\frac{b}{2a},\frac{b}{2a}+\frac{1}{2a^2+1}\right)$因为$x_E=y_E$,所以$-\frac{b}{2a}=\frac{b}{2a}+\frac{1}{2a^2+1}$,

所以有$b=-\frac{a}{2a^2+1}=-\frac{1}{2a+\frac{1}{a}}\geqslant -\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$所以$k=1$.

因为$0<a<1$,当且仅当$2a=\frac{1}{a}$即$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$时,$b$有最小值$-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

17. **解析:** (1)$\because a<b<a+b<ab<a+2b$,$a,b\in\mathbf{N}_+$,

$\therefore\begin{cases}a+b<ab,\\ ab<a+2b.\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a>\frac{b}{b-1},\\ a<\frac{2b}{b-1}.\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a>1+\frac{1}{b-1},\\ a<2+\frac{2}{b-1}.\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}a>1,\\ a<4\end{cases}$.

$\therefore a=2$或$a=3$($a=3$时不合$a<b$,舍去).$\therefore a=2$.

(2)$a_m=2+(m-1)b$,$b_n=b\cdot 2^{n-1}$,由$a_m+3=b_n$

可得$5+(m-1)b=b\cdot 2^{n-1}$.

$\therefore b(2^{n-1}-m+1)=5$.

又$\because b,n,m\in(\mathrm{N}_+)$

$\therefore b=5$

(3)由(2)知$a_n=5n-3$,$b_n=5\cdot 2^{n-1}$,

$\therefore a_m=b_n-3=5\cdot 2^{n-1}-3$.

$\therefore C_n=5\cdot 2^{n-1}-3$.

$\therefore S_n=5(2^n-1)-3n$,$T_n=\frac{1}{2}n(5n-1)$.

$\because S_1=T_1=2$,$S_2=T_2=9$.

当$n\geqslant 3$时,$S_n-T_n=5\left[2^n-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-1\right]$

$=5\left[(1+1)^n-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-1\right]$

$=5\left[1+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^3+\cdots\right)-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-1]$

$>5\left[1+n+\frac{n(n-1)}{2}-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-1\right]=0$.

$\therefore S_n>T_n$.综上得$S_n\geqslant T_n(n\in\mathbf{N}_+)$.

18. **解析:** (1)椭圆方程$E$为:$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

(2)(法一)$AF_1$方程为:$3x-4y+6=0$,

$AF_2$方程为:$x=2$

设角分线上任意一点为$P(x,y)$,则$\frac{|3x-4y+6|}{5}=|x-2|$.

得$2x-y-1=0$或$x+2y-8=0$(舍,斜率为正)

$\therefore$ 直线方程为$2x-y-1=0$

(法二)$\frac{\overrightarrow{AF_1}}{|\overrightarrow{AF_1}|}+\frac{\overrightarrow{AF_2}}{|\overrightarrow{AF_2}|}=-\frac{4}{5}(1,2)$

$\therefore k=2$,即$2x-y-1=0$

(3)假设存在$B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$两点关于直线$l$对称,

$\therefore k_{BC}=-\frac{1}{2}$

方程为$y=-\frac{1}{2}x+m$代人$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$得$x^2-mx+m^2-12=0$,$BC$中点为$\left(\frac{m}{2},\frac{3m}{4}\right)$

在直线$2x-y-1=0$上,得$m=4$.

$(2,3)$与$A$重合,不成立,所以不存在满足题设条件的相异的两点.