2009年全国中学生数学能力竞赛高二组(样题)

(试题总分:150分 答题时间:120分钟)

基础能力部分(共60分,每题5分)

一、运算求解能力

(能力要求:会根据法则、公式进行正确运算、变形;能根据问题的条件,寻找与设计合理、简捷的运算途径)

1. 若函数 $f(x)=\min\{3+\log_{\frac{1}{4}}x,\log_2 x\}$,其中 $\min\{p,q\}$ 表示 p,q 两者中的较小者,则 $f(x)<2$ 的解集为________.

2. 已知函数 $f(x)=a\log_2 x-b\log_3 x+2$,若 $f(\frac{1}{2009})=4$,则 f(2009)的值为________.

3. 在△ABC 中,内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c,已知 a、b、c 成等比数列,$a+c=3$,$\cos B=\frac{3}{4}$,则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ 等于________.

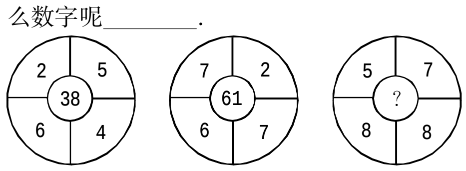
二、数据处理能力

(能力要求:会收集、整理、分析数据,能抽取对研究问题有用的信息,并作出正确的判断;能根据要求对数据进行估计和近似计算)

4. 某资料室在计算机使用中,出现下表所示的以一定规则排列的编码,且从左至右以及从上至下都是无限的.此表中,主对角线上数列 1,2,5,10,17…的通项公式 $a_n=$________.

1	1	1	1	1	1	…
1	2	3	4	5	6	…
1	3	5	7	9	11	…
1	4	7	10	13	16	…
1	5	9	13	17	21	…
1	6	11	16	21	26	…
…	…	…	…	…	…	…

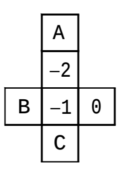
5. 根据下面三个圆圈中的数字规律,问号应该代表什么数字呢________.



三、空间想象能力

(能力要求:会画简单的几何图形;能准确地分析图形中有关量的相互关系;会运用图形与图表等手段形象地揭示问题的本质)

6. 如图是一个正方体的平面展开图,若在其中的三个正方形 A、B、C 内分别填上适当的数,使得它们折成正方体后相对面上的两个数互为相反数,则填入正方形 A、B、C 内的三个数依次为________.

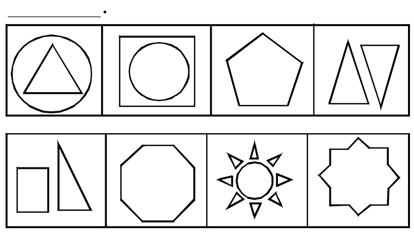


四、抽象概括能力

(能力要求:能从具体、生动的实例中,发现研究对象的本质;能从给定的大量信息材料中,概括出一些结论,并能应用于解决问题或作出新的判断)

7. 将 1,2,3,…,n 按逆时针方向依次放置在一个单位圆上,然后从 1 开始,按逆时针方向,隔一个删除一个数,直至剩余一个数而终止,依次删除的数为 1,3,5,7,….当 n = 65 时,剩余的一个数为________.

8. 根据下图的特点,则接下来应选择的正确图形是________.



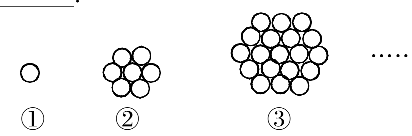
① ② ③ ④

五、推理论证能力

(能力要求:会根据已知的事实和已获得的正确数学命题来论证某一数学命题的真实性)

9. 在面积相等的圆与正方形中,圆的周长较小.若把此结论拓展到空间,在体积相等的球和正方体中,________的表面积较小(填球或正方体).

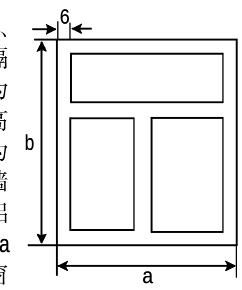
10. 如图,①、②、③是由花盆摆成的图案,根据图中花盆摆放的规律,第 n 个图形中的花盆数 $a_n=$________.



六、实践能力

(能力要求:能够对问题所提供的信息资料进行归纳、整理和分类,将实际问题抽象为数学问题,建立数学模型;能应用相关的数学方法解决问题,并能用数学语言正确地表述、说明)

11. 如图,一个铝合金窗分为上、下两栏,四周框架和中间隔栏的材料为铝合金,宽均为 6 cm,上栏和下栏的框内高度(不含铝合金部分)的比为 1∶2,此铝合金窗占用的墙面面积为 28800 cm^2,设该铝合金窗的宽和高分别为 a cm,b cm,若要使铝合金窗的透光部分的面积最大,则 a = ________ cm,b = ________ cm,最大面积为________ cm^2.



七、创新意识

(能力要求:能够独立思考,灵活和综合地运用所学数学的知识、思想和方法,提出问题、分析问题和解决问题)

12. 设 P 和 Q 是两个集合,定义集合 $P-Q=\{x\mid x\in P,且\ x\notin Q\}$,若 $P=\{1,2,3,4\}$,$Q=\{x\mid\sqrt{x+\frac{1}{2}}<2,x\in R\}$,则 $P-Q=$________.

综合能力部分(共90分)

13.(本题满分10分)

已知集合 $A=\{x\mid(x-2)[x-(3a+1)]<0\}$,$B=\{x\mid\frac{x-a}{x-(a^2+1)}<0\}$.

(1)当 a = 2 时,求 $A\cap B$;

(2)求使 $B\subseteq A$ 的实数 a 的取值范围.

14.(本题满分10分)

这是一道有趣的某公司招聘笔试题:烧一根不均匀的绳子,从头烧到尾总共要一个小时,现在有若干条材质相同的绳子,问如何利用烧绳的方法来计时十五分钟呢?

15.(本题满分14分)

(任选一题作答,如果2道题都答则按照第1题给分)

(选做题一)

设命题 p:函数 $f(x)=(a-\frac{3}{2})^x$ 是 R 上的减函数,命题 q:函数 $f(x)=x^2-4x+3$ 在[0,a]上的值域为[-1,3].若"p 且 q"为假命题,"p 或 q"为真命题,求实数 a 的取值范围.

(选做题二)

在北京奥运会羽毛球女单决赛中,中国运动员张宁以 2∶1 力克排名世界第一的队友谢杏芳,蝉联奥运会女单冠军.羽毛球比赛按"三局两胜制"的规则进行(即先胜两局的选手获胜,比赛结束),且各局之间互不影响.根据两人以往的交战成绩分析,谢杏芳在前两局的比赛中每局获胜的概率是 0.6,但张宁在前二局战成 1∶1 的情况下,在第三局中凭借过硬的心理素质,获胜的概率为 0.6.若张宁与谢杏芳下次在比赛上相遇.

(1)求张宁以 2∶1 获胜的概率;

(2)求张宁失利的概率.

16.(本题满分18分)

设函数 $y=f(x)$是定义在正实数集上的函数,并且满足下面三个条件:①对任意正数 x、y,都有 $f(xy)=f(x)+f(y)$;②当 $x>1$ 时,$f(x)<0$;③$f(3)=-1$.

(1)求 f(1)、$f(\frac{1}{9})$的值;

(2)证明 f(x)在定义域上是减函数;

(3)如果不等式 $f(x)+f(2-x)<2$ 成立,求 x 的取值范围.

17.(本题满分18分)

在△ABC 中,已知∠A = 45°,∠B = 75°,点 D 在 AB 上,且 CD = 10.

(1)若点 D 与点 A 重合,试求线段 AB 的长;

(2)在下列各题中,任选一题,并写出计算过程,求出结果.

①(解答本题,最多可得6分)若 CD⊥AB,求线段 AB 的长;

②(解答本题,最多可得8分)若 CD 平分∠ACB,求线段 AB 的长;

③(解答本题,最多可得10分)若点 D 为线段 AB 的中点,求线段 AB 的长.

18.(本题满分20分)

对于给定数列$\{c_n\}$,如果存在实常数 p,q 使得 $c_{n+1}=pc_n+q$ 对于任意 $n\in N^*$ 都成立,我们称数列$\{c_n\}$是"M 类数列".

(1)若 $a_n=2n$,$b_n=3\cdot2^n$,$n\in N^*$,数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$是否为"M 类数列".若是,指出它对应的实常数 p,q,若不是,请说明理由;

(2)证明:若数列$\{a_n\}$是"M 类数列",则数列$\{a_n+a_{n+1}\}$也是"M 类数列";

(3)若数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$,$a_n+a_{n+1}=2n+t(n\in N^*)$,t 为常数.求数列$\{a_n\}$前 2009 项的和,并判断$\{a_n\}$是否为"M 类数列",并说明理由.

(参考答案见下期)