《2009年全国中学生数学能力竞赛高二组(样题)》参考答案

基础能力部分(共60分,每题5分)

一、运算求解能力

1. $(0,4)\cup(4,+\infty)$ 2. 0 3. $-\frac{3}{2}$

二、数据处理能力

4. n^2-2n+2 5. 96

三、空间想象能力

6. 1,0,2

四、抽象概括能力

7. 2 8. ①

五、推理论证能力

9. 球 10. $3n^2-3n+1$

六、实践能力

11. 160,180,23328

七、创新意识

12. $\{4\}$

综合能力部分(共90分)

13. 解:(1)当 $a=2$ 时,$A=\{x\mid 2<x<7\}$,$B=\{x\mid 2<x<5\}$,$\therefore A\cap B=\{x\mid 2<x<5\}$.

(2) $\because (a^2+1)-a=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$,即 $a^2+1>a$,

$\therefore B=\{x\mid a<x<a^2+1\}$.

①当 $3a+1=2$,即 $a=\frac{1}{3}$ 时,$A=\varnothing$,不存在 a 使 $B\subseteq A$;

②当 $3a+1>2$,即 $a>\frac{1}{3}$ 时,$A=\{x\mid 2<x<3a+1\}$,

由 $B\subseteq A$ 得 $\begin{cases}a\geqslant 2\\ a^2+1\leqslant 3a+1\end{cases}\Rightarrow 2\leqslant a\leqslant 3$;

③当 $3a+1<2$,即 $a<\frac{1}{3}$ 时,$A=\{x\mid 3a+1<x<2\}$,

由 $B\subseteq A$ 得 $\begin{cases}3a+1\leqslant a\\ a^2+1\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow -1\leqslant a\leqslant -\frac{1}{2}$.

综上,a 的范围为 $[-1,-\frac{1}{2}]\cup[2,3]$.

14. 解:先拿出两根绳子,其中第一根从头烧到尾,第二根绳子两头点着,当第二根绳子烧没时,把第一个绳子熄灭,这时得到了可以计时半小时的绳子,重复这个操作还可以再得到一根可以计时半小时的绳子.按照同样的方法,用这两根可以计时半小时的绳子可以得到计时十五分钟的绳子.

15. (选做题一)

解:由 $0<a-\frac{3}{2}<1$ 得 $\frac{3}{2}<a<\frac{5}{2}$,

$\because f(x)=(x-2)^2-1$,在 $[0,a]$ 上的值域为 $[-1,3]$ 得 $2\leqslant a\leqslant 4$,

$\because$ "p 且 q"为假,"p 或 q"为真,$\therefore$ p,q 一真一假.

若 p 真 q 假得,$\frac{3}{2}<a<2$,若 p 假 q 真得,$\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant 4$.

综上所得,a 的取值范围是 $\{x\mid \frac{3}{2}<a<2$ 或 $\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant 4\}$.

(选做题二)

解:(1)张宁以 2∶1 获胜即前两局战成 1∶1,第三局张宁胜.

$P(1)=C_2^1\times 0.6\times(1-0.6)\times 0.6=0.288$.

(2) 张宁失利包括 0∶2 和 1∶2 两种情况 $P(2)=0.6\times 0.6+C_2^1\times 0.6\times(1-0.6)\times(1-0.6)=0.552$.

16. 解:(1)令 $x=y=1$,易得 $f(1)=0$.

而 $f(9)=f(3)+f(3)=-1-1=-2$,

且 $f(9)+f(\frac{1}{9})=f(1)=0$,得 $f(\frac{1}{9})=2$.

(2)若 $0<x_1<x_2\Rightarrow \frac{x_2}{x_1}>1$,则 $f(\frac{x_2}{x_1})<0$,$\therefore f(x_2)=f(\frac{x_2}{x_1}\cdot x_1)=f(\frac{x_2}{x_1})+f(x_1)<f(x_1)$,

$\therefore f(x)$ 在正实数集上为减函数.

(3)由条件①及(1)的结果得 $f[x(2-x)]<f(\frac{1}{9})$,其中 $0<x<2$,

由(2)的结果得 $\begin{cases}x(2-x)>\frac{1}{9}\\ 0<x<2\end{cases}$,解得 x 的取值范围是 $(1-\frac{2\sqrt{2}}{3},1+\frac{2\sqrt{2}}{3})$.

17. 解:(1) $\angle ACB=60^\circ$, 又 $\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,由正弦定理,得 $AB=\frac{AC\cdot\sin\angle ACB}{\sin\angle B}=\frac{10\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}=15\sqrt{2}-5\sqrt{6}$.

(2) ①$AD=CD=10$,$\angle BCD=15^\circ$,由 $\cos 15^\circ=\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

得 $\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,$\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$,

故 $BD=10\tan\angle BCD=20-10\sqrt{3}$,$AB=AD+DB=30-10\sqrt{3}$;

②$\angle ACD=\angle BCD=30^\circ$,得 $AD=\frac{10\sin\angle ACD}{\sin\angle A}=5\sqrt{2}$,

$BD=\frac{10\sin\angle BCD}{\sin\angle B}=5(\sqrt{6}-\sqrt{2})$,$AB=AD+DB=5\sqrt{6}$.

③$AC=\frac{AB\sin\angle B}{\sin\angle ACB}=\frac{AB\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ}$,$BC=\frac{AB\sin\angle A}{\sin\angle ACB}=\frac{AB\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}$,

延长 CD 到 E,使 DE = CD,连结 EA、EB,则由余弦定理可得

$CE^2=AC^2+AE^2-2AC\cdot AE\cdot\cos\angle CAE$,

又 $\cos\angle CAE=\cos(\pi-\angle ACB)=-\cos\angle ACB$,$BC=AE$,得

$(2CD)^2=AC^2+BC^2+AC\cdot BC$,即 $400=\frac{AB^2\sin^2 75^\circ}{\sin^2 60^\circ}+\frac{AB^2\sin^2 45^\circ}{\sin^2 60^\circ}+\frac{AB^2\sin 75^\circ\cdot\sin 45^\circ}{\sin^2 60^\circ}$,解得 $AB=\sqrt{\frac{1200}{5+2\sqrt{3}}}$.

18. (1)解:因为 $a_n=2n$,则有 $a_{n+1}=a_n+2$,$n\in N^*$.

故数列 $\{a_n\}$ 是"M 类数列",对应的实常数分别为 1,2.

因为 $b_n=3\cdot 2^n$,则有 $b_{n+1}=2b_n$,$n\in N^*$,

故数列 $\{b_n\}$ 是"M 类数列",对应的实常数分别为 2,0.

(2)证明:若数列 $\{a_n\}$ 是"M 类数列",则存在实常数 p,q,

使得 $a_{n+1}=pa_n+q$ 对于任意 $n\in N^*$ 都成立,且有 $a_{n+2}=pa_{n+1}+q$ 对于任意 $n\in N^*$ 都成立,因此 $(a_{n+1}+a_{n+2})=p(a_n+a_{n+1})+2q$ 对于任意 $n\in N^*$ 都成立,故数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 也是"M 类数列".对应的实常数分别为 p,2q.

(3)解:因为 $a_n+a_{n+1}=2n+t(n\in N^*)$,则有 $a_2+a_3=4+t$,$a_4+a_5=8+t$,…,

$a_{2006}+a_{2007}=4012+t$,$a_{2008}+a_{2009}=4016+t$.

故数列 $\{a_n\}$ 前 2009 项的和

$S_{2009}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2006}+a_{2007})+(a_{2008}+a_{2009})=1+(4+t)+(8+t)+\cdots+(4012+t)+(4016+t)=1+4020\times 502+1004t=2018041+1004t$.

若数列 $\{a_n\}$ 是"M 类数列",则存在实常数 p,q 使得 $a_{n+1}=pa_n+q$ 对于任意 $n\in N^*$ 都成立,

且有 $a_{n+2}=pa_{n+1}+q$ 对于任意 $n\in N^*$ 都成立,

因此 $(a_{n+1}+a_{n+2})=p(a_n+a_{n+1})+2q$ 对于任意 $n\in N^*$ 都成立,而 $a_n+a_{n+1}=2n+t(n\in N^*)$,且 $a_{n+1}+a_{n+2}=2(n+1)+t(n\in N^*)$,则有 $2n+2+t=2pn+pt+2q$ 对于任意 $n\in N^*$ 都成立,可以得到 $p=1$,$q=1$.所以有 $a_{n+1}=a_n+1$,$a_n=n$,$t=1$,经检验满足条件.因此,当且仅当 $t=1$ 时,数列 $\{a_n\}$ 是"M 类数列".对应的实常数分别为 1,1.