2009年全国中学生数学能力竞赛高三组(样题)

(试题总分:150分 答题时间:120分钟)

基础能力部分(共60分,每题5分)

一、运算求解能力

(会根据法则、公式进行正确的运算、变形;能根据问题的条件,寻找与设计合理、简捷的运算途径)

1. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{\sqrt6}{3}$, $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{\sqrt3}{3}$,则 $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=$ ________.

2. $(1+i)^4+(1-i)^4=$ ________.

3. 求函数 $y=\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-(\sqrt3-1)x+1}+\sqrt{2x^2+(\sqrt3+1)x+1}$ 的最小值________.

二、数据处理能力

(会收集、整理、分析数据,能抽取对研究问题有用的信息,并作出正确的判断;能根据要求对数据进行估计和近似计算)

4. 右图是一个 4×4 的表格,每个方格中填入了数字0或1.按下列规则进行“操作”:每次可以同时改变某一行的数字:1变成0,0变成1. 问:能否通过若干次“操作”使得每一格中的数据变成1? ________.
原因是________________________________.

1	0	0	1
1	1	0	1
0	1	0	0
1	0	1	1

三、空间想象能力

(会画简单的几何图形;能准确地分析图形中有关量的相互关系;会运用图形与图表等手段形象地揭示问题的本质)

5. 已知 m,n 为不同的直线,α,β,γ 为不重合的平面.
① $m\perp\alpha,n\perp\alpha$,则 $m\parallel n$;② $m\perp\alpha,m\perp\beta$,则 $\alpha\parallel\beta$;
③ $\gamma\perp\alpha,\gamma\perp\beta$,则 $\alpha\parallel\beta$;④ $m\perp\alpha,\alpha\perp\beta$,则 $m\parallel\beta$;
⑤ $m\parallel\alpha,n\perp\alpha$,则 $m\perp n$;⑥ $m\perp\alpha,m\parallel\beta$,则 $\alpha\perp\beta$,
以上是真命题的有________.(请填写所有你认为正确的真命题序号,多填漏填均不得分)

6. 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1=2,AB=1$,M,N 分别在 AD_1,BC 上移动,始终保持 $MN\parallel$ 平面 DCC_1D_1,设 $BN=x,MN=y$,则函数 $y=f(x)$ 的图象大致是下列图象中的________.

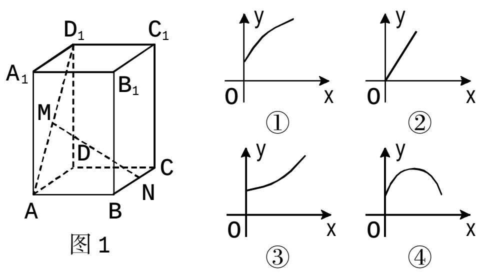


图1 ① ② ③ ④

四、抽象概括能力

(能从具体、生动的实例中,发现研究对象的本质;能从给定的大量信息材料中,概括出一些结论,并能应用于解决问题或作出新的判断)

7. 记a、b的代数式为 $f(a,b)$,它满足关系:
①$f(a,a)=a$;
②$f(ka,kb)=kf(a,b)$;
③$f(a_1+a_2,b_1+b_2)=f(a_1,b_1)+f(a_2,b_2)$;
④$f(a,b)=f(b,\frac{a+b}{2})$,则 $f(a,b)=$ ________.

8. 古希腊人常用小石子在沙滩上摆成各种形状来研究数.例如:

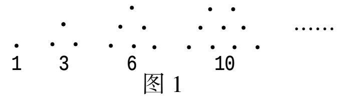


图1

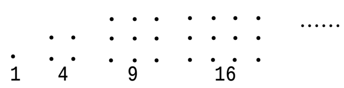


图2

他们研究过图1中的1,3,6,10,…,由于这些数能够表示成三角形,将其称为三角形数;类似地,称图2中的1,4,9,16,…,这样的数称为正方形数.下列数中既是三角形数又是正方形数的是________.
①289 ②1024 ③1225 ④1378

五、推理论证能力

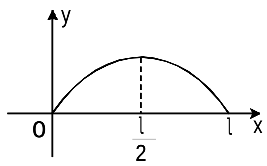
(会根据已知的事实和已获得的正确数学命题来论证某一数学命题的真实性)

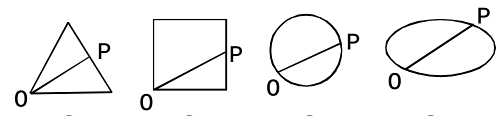
9. 直线 l_1 与直线 l_2 平行,l_1 上有5个不同的点,l_2 上有10个不同的点,将 l_1 上的点与 l_2 上的点连成线段,若没有三条线段交于同一点,则这些线段之间的交点共有________个.(用具体的数字作答)

六、实践能力

(能够对问题所提供的信息资料进行归纳、整理和分类,将实际问题抽象为数学问题,建立数学模型;能应用相关的数学方法解决问题,并能用数学语言正确地表述、说明)

10. 点P从点O出发,按逆时针方向沿周长为 l 的图形运动一周,O、P两点连线的距离y与点P走过的路程x的函数关系如图,那么点P所走的图形是________.





① ② ③ ④

七、创新意识

(能够独立思考,灵活和综合地运用所学数学的知识、思想和方法,提出问题、分析问题和解决问题)

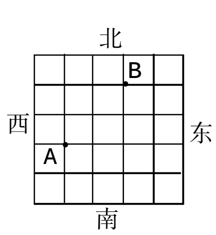
11. 设集合 $B=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,$J=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$,定义集合 $B\oplus J=\{(a,b)\,|\,a=a_1+a_2+\cdots+a_n,b=b_1+b_2+\cdots+b_m\}$,已知 $B=\{51,21,28\}$,$J=\{89,70,52\}$,则 $B\oplus J$ 的子集为______.

12. 对于直角坐标平面内任意两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,定义它们之间的一种“距离”:$\|AB\|=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$.给出下列三个命题:
①若点B在线段AC上,则 $\|AC\|=\|CB\|+\|AB\|$;
②在△ABC中,若∠C=90°,则 $\|AC\|^2+\|CB\|^2=\|AB\|^2$;
③在△ABC中,$\|AC\|+\|CB\|>\|AB\|$.
其中真命题的序号是________.

综合能力部分(共90分)

13.(本题满分10分)
可怜的琼斯夫人路过泡泡糖出售机时,尽量不使她的双胞胎儿子有所察觉.可还是被她的孩子们发现了.
大儿子:“妈妈,我要泡泡糖.”
二儿子:“妈妈,我也要,我要和比利拿一样颜色的.”
分币泡泡糖出售机(每个泡泡糖一分钱)几乎空了,里面只有4粒白色的和6粒红色的泡泡糖.说不准下一粒是什么颜色.琼斯夫人如果要得到两粒同种颜色的泡泡糖,最多需要准备花________分钱?
如果出售机内有6粒红色的,4粒白色的和5粒蓝色的.琼斯夫人最多要花________分钱?
如果琼斯夫人的孩子是三胞胎,那该怎样呢?她最多需要花______分钱?
假如琼斯夫人是幼儿园的老师,她带着k个孩子路过泡泡糖出售机,出售机中有n组同色的泡泡糖,且每组糖至少有k粒,她至多需要花________分钱?(给出横线上所填答案的原因)

14.(本题满分10分)
如图是一个方格迷宫,甲、乙两人分别位于迷宫的A、B两处,两人同时以每分钟一格的速度向东、西、南、北四个方向行走,已知甲向东、西行走的概率都为 $\frac14$,向南、北行走的概率为 $\frac13$ 和p,乙向东、西、南、北四个方向行走的概率均为q.
(1)求p和q的值;
(2)问最少几分钟,甲、乙两人相遇?并求出最短时间内可以相遇的概率.



15.(本题满分15分)
(本大题共两小题,同学们任选其一作答,若两道题全答,只按照选做题第一题给分)

(选做题一)
在△ABC中,角A,B,C所对边分别为a,b,c,且 $1+\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{2c}{b}$.
(1)求角A;
(2)若 $m=(0,-1)$,$n=(\cos B,2\cos^2\frac{C}{2})$,试求 $|m+n|$ 的最小值.

(选做题二)
如图1,在直角梯形ABCP中,$AP\parallel BC$,$AP\perp AB$,$AB=BC=\frac12AP=2$,D是AP的中点,E,F,G分别为PC、PD、CB的中点,将△PCD沿CD折起,使得 $PD\perp$ 平面ABCD,如图2.
(1)求证:$AP\parallel$ 平面EFG;
(2)求二面角G-EF-D的大小;
(3)求三棱椎D-PAB的体积.

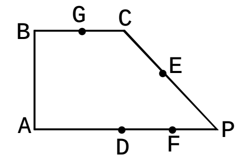


图1

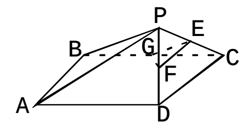


图2

16.(本题满分15分)
数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=t$,$a_2=t^2$($t>0$ 且 $t\ne1$).$x=\sqrt t$ 是函数 $f(x)=a_{n-1}x^3-3[(t+1)a_n-a_{n+1}]x+1$($n\geqslant2$)的一个极值点.
(1)证明:数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是等比数列,并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2)记 $b_n=2(1-\frac{1}{a_n})$,当 $t=2$ 时,数列 $\{b_n\}$ 的前n项和为 S_n,求使 $S_n>2009$ 的n的最小值;
(3)当 $t=2$ 时,是否存在指数函数 $g(x)$,使得对于任意的正整数n有 $\sum_{k=1}^{n}\frac{g(k)}{(a_k+1)(a_{k+1}+1)}<\frac13$ 成立?若存在,求出满足条件的一个 $g(x)$;若不存在,请说明理由.

17.(本题满分20分)
在直角坐标平面中,△ABC的两个顶点A、B的坐标分别为 $A(-1,0)$、$B(1,0)$,平面内两点G,M同时满足下列条件:①$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$;②$|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MC}|$;③$\overrightarrow{GM}\parallel\overrightarrow{AB}$.
(1)求△ABC的顶点C的轨迹方程;
(2)过点P(3,0)的直线 l 与(1)中轨迹交于E,F两点,求 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 的取值范围.

18.(本题满分20分)
已知函数 $g(x)=\frac{1}{\sin\theta\cdot x}+\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上为增函数,且 $\theta\in(0,\pi)$,$f(x)=mx-\frac{m-1}{x}-\ln x$,$m\in\mathbf{R}$.
(1)求θ的值;
(2)若 $f(x)-g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为单调函数,求m的取值范围;
(3)设 $h(x)=\frac{2e}{x}$,若在 $[1,e]$ 上至少存在一个 x_0,使得 $f(x_0)-g(x_0)>h(x_0)$ 成立,求m的取值范围.

(参考答案见下期)