《2009年全国中学生数学能力竞赛高三组(样题)》参考答案

基础能力部分(共60分,每题5分)

一、运算求解能力

1. $\frac{1}{4}$. 2. -8. 3. 3.

二、数据处理能力

4. 不可能,原因:我们考察表格中填入的所有数的和的奇偶性:第一次"操作"之前,它等于9,是一个奇数,每一次"操作",要改变一行或一列四个方格的奇偶性,显整个16格中所有数的和的奇偶性不变.但当每一格中所有数字都变成1时,整个16格中所有数的和是16,为一偶数.故不能通过若干次"操作"使得每一格中的数都变成1.

三、空间想象能力

5. ①②⑤⑥. 6. ③.

四、抽象概括能力

7. $\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b$. 8. ③.

五、推理论证能力

9. 450.

六、实践能力

10. ③.

七、创新意识

11. $\{(100,211)\}$,$\varnothing$. 12. ①.

综合能力部分(共90分)

13. 解:琼斯夫人并不要求必须得到两粒红色的糖或者两粒白色的糖,她只要拿到两粒同色的糖就可以了,即使先取到两粒不同色的糖,第三粒必定与前两粒中的一粒同色.所以第一空填3分钱.

同理第二空填4分钱.

第三问最坏的情况是她拿到了2粒红的,2粒白的和2粒蓝的,第七粒肯定与前六粒中的两粒同色,所以填7分钱.

第四问最坏情况是她每种颜色的泡泡糖都买了 $k-1$ 粒,那么再买一粒即可,所以填 $n(k-1)+1$ 分钱.

14. (1)$p=\frac{1}{6}$,$q=\frac{1}{4}$. (2)$\frac{37}{2304}$.

15. (选做题一)(1)$A=\frac{\pi}{3}$. (2)$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15. (选做题二)(1)略.

(2)以D为原点,以$\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{DP}$分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系D-xyz,则有关点及向量的坐标为 $P(0,0,2)$,$C(-2,0,0)$,$G(-2,-1,0)$,$E(-1,0,1)$,$F(0,0,1)$,$A(0,-2,0)$.

$\because$ 底面ABCD是正方形,$\therefore AD\perp DC$,

又 $\because PD\perp$ 平面ABCD,$\therefore AD\perp PD$.

又 $PD\cap CD=D$,$\therefore AD\perp$ 平面PCD,

$\therefore$ 向量$\overrightarrow{DA}$是平面PCD的一个法向量,$\overrightarrow{DA}=(0,-2,0)$.

又由(1)知平面EFG的法向量为 $n=(0,-1,1)$,

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{DA},n\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

结合图知二面角G-EF-D的平面角为45°.

(3)$\frac{4}{3}$.

16. 解:(1)$f'(x)=3a_{n-1}x^2-3[(t+1)a_n-a_{n+1}]\ (n\geqslant 2)$.由题意 $f'(\sqrt{t})=0$,

即 $3a_{n-1}(\sqrt{t})^2-3[(t+1)a_n-a_{n+1}]=0\ (n\geqslant 2)$,

$\therefore a_{n+1}-a_n=t(a_n-a_{n-1})\ (n\geqslant 2)$,

$\because t>0$ 且 $t\neq 1$,$\therefore$ 数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是以 t^2-t 为首项,t为公比的等比数列,

$\therefore a_{n+1}-a_n=(t^2-t)t^{n-1}=(t-1)\cdot t^n$,

$\therefore a_2-a_1=(t-1)t$,

$a_3-a_2=(t-1)t^2$,

…

$a_n-a_{n-1}=(t-1)t^{n-1}$.

以上各式两边分别相加得 $a_n-a_1=(t-1)(t+t^2+\cdots+t^{n-1})$,$\therefore a_n=t^n\ (n\geqslant 2)$,

当 $n=1$ 时,上式也成立,$\therefore a_n=t^n$.

(2)当 $t=2$ 时,$b_n=\frac{2(2^n-1)}{2^n}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$,

$\therefore S_n=2n-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2n-2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

由 $S_n>2009$,得 $2n-2+2\left(\frac{1}{2}\right)^n>2009$,$n+\left(\frac{1}{2}\right)^n>1005.5$,

当 $n\leqslant 1005$ 时,$n+\left(\frac{1}{2}\right)^n<1005.5$,

当 $n\geqslant 1006$ 时,$n+\left(\frac{1}{2}\right)^n>1005.5$

因此n的最小值为1006.

(3)$\because \frac{1}{(a_k+1)(a_{k+1}+1)}=\frac{1}{(2^k+1)(2^{k+1}+1)}=\frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{2^k+1}-\frac{1}{2^{k+1}+1}\right)$,

令 $g(k)=2^k$,

则有 $\frac{g(k)}{(a_k+1)(a_{k+1}+1)}=\frac{1}{2^k+1}-\frac{1}{2^{k+1}+1}$.

则 $\sum_{k=1}^{n}\frac{g(k)}{(a^k+1)(a_{k+1}+1)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k+1}-\frac{1}{2^{k+1}+1}\right)$

$=\left(\frac{1}{2+1}-\frac{1}{2^2+1}\right)+\left(\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{2^3+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}+1}<\frac{1}{3}$,

即存在函数 $g(x)=2^x$ 满足条件.

17. 解:(1)设 $C(x,y)$,$G(x_0,y_0)$,$M(x_M,y_M)$,

$\because |\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|$,$\therefore$ M点在线段AB的中垂线上.

由已知 $A(-1,0)$,$B(1,0)$,$\therefore x_M=0$,

又 $\because \overrightarrow{GM}\parallel\overrightarrow{AB}$,$\therefore y_M=y_0$,

又$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$,$\therefore (-1-x_0,-y_0)+(1-x_0,-y_0)+(x-x_0,y-y_0)=(0,0)$,

$\therefore x_0=\frac{x}{3}$,$y_0=\frac{y}{3}$,$y_M=\frac{y}{3}$,

$\because |\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MC}|$,$\therefore \sqrt{(0-1)^2+\left(\frac{y}{3}-0\right)^2}=\sqrt{(0-x)^2+\left(\frac{y}{3}-y\right)^2}$,

$\therefore x^2+\frac{y^2}{3}=1\ (y\neq 0)$,

$\therefore$ 顶点C的轨迹方程为 $x^2+\frac{y^2}{3}=1\ (y\neq 0)$.

(2)设直线l方程为 $y=k(x-3)$,$E(x_1,y_1)$,$F(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}y=k(x-3)\\ x^2+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$,

消去y得 $(k^2+3)x^2-6k^2x+9k^2-3=0$.①

$\therefore x_1+x_2=\frac{6k^2}{k^2+3}$,$x_1x_2=\frac{9k^2-3}{k^2+3}$,

而$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=|\overrightarrow{PE}|\cdot|\overrightarrow{PF}|\cdot\cos 0°=|\overrightarrow{PE}|\cdot|\overrightarrow{PF}|$

$=\sqrt{1+k^2}\,|3-x_1|\cdot\sqrt{1+k^2}\,|3-x_2|$

$=(1+k^2)|9-3(x_1+x_2)+x_1x_2|$

$=\frac{24(k^2+1)}{k^2+3}=24-\frac{48}{k^2+3}$,

由方程①知

$\Delta=(6k^2)^2-4(k^2+3)(9k^2-3)>0$,$k^2<\frac{3}{8}$,

$\because k\neq 0$,$\therefore 0<k^2<\frac{3}{8}$,$\therefore k^2+3\in\left(3,\frac{27}{8}\right)$,

$\therefore \overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}\in\left(8,\frac{88}{9}\right)$.

18. 解:(1)$\theta=\frac{\pi}{2}$.

(2)由(1),得 $f(x)-g(x)=mx-\frac{m}{x}-2\ln x$.

$\therefore (f(x)-g(x))'=\frac{mx^2-2x+m}{x^2}$.

$\because f(x)-g(x)$在其定义域内为单调函数,

$\therefore mx^2-2x+m\geqslant 0$ 或者 $mx^2-2x+m\leqslant 0$ 在[1

成立.

$mx^2-2x+m\geqslant 0$ 等价于 $m(1+x^2)\geqslant 2x$,

即 $m\geqslant\frac{2x}{1+x^2}$在$[1,+\infty)$恒成立,

而$\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2}{x+\frac{1}{x}}$,$\left(\frac{2}{x+\frac{1}{x}}\right)_{max}=1$,$\therefore m\geqslant 1$.

$mx^2-2x+m\leqslant 0$ 等价于 $m(1+x^2)\leqslant 2x$,

即 $m\leqslant\frac{2x}{1+x^2}$在$[1,+\infty)$恒成立,

而$\frac{2x}{x^2+1}\in(0,1]$,$m\leqslant 0$.

综上,m的取值范围是$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.

(3)构造 $F(x)=f(x)-g(x)-h(x)$,

$F(x)=mx-\frac{m}{x}-2\ln x-\frac{2e}{x}$.

当 $m\leqslant 0$ 时,$x\in[1,e]$,

$mx-\frac{m}{x}\leqslant 0$,$-2\ln x-\frac{2e}{x}<0$,

所以在$[1,e]$上不存在一个 x_0,使得 $f(x_0)-g$

$h(x_0)$成立.

当 $m>0$ 时,$(F(x))'=m+\frac{m}{x^2}-\frac{2}{x}+\frac{2e}{x^2}$

$=\frac{mx^2-2x+m+2e}{x^2}$.

因为 $x\in[1,e]$,所以 $2e-2x\geqslant 0$,$mx^2+m>0$,

$(x))'>0$ 在 $x\in[1,e]$恒成立.

故 $F(x)$在$[1,e]$上单调递增,$F(x)_{max}=F(e)=me$

4,只要 $me-\frac{m}{e}-4>0$,

解得 $m>\frac{4e}{e^2-1}$,故m的取值范围是$\left(\frac{4e}{e^2-1},+\infty\right)$.