

2009年全国中学生数学能力竞赛高一组(样题)

满分:150分 时间:120分钟

(I)基础能力部分

(本部分共12道小题,每小题5分,共60分)

一、运算求解能力

(能力要求:会根据法则、公式进行正确的运算、变形;能根据问题的条件,寻找与设计合理、简捷的运算途径)

1. 已知 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 定义集合 A, B 之间的运算“ $*$ ”: $A * B = \{x | x = x_1 + x_2, x_1 \in A, x_2 \in B\}$, 则集合 $A * B$ 中最大的元素是_____.

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 的值域为_____.

3. 若集合 $A = \{x | y = 3^{\frac{1}{1-x}}\}$, $B = \{x | y = \sqrt{2x-1}\}$, 则集合 $A \cap B = \text{_____}$.

二、数据处理能力

(能力要求:会收集、整理、分析数据,能抽取对研究问题有用的信息,并作出正确的判断;能根据要求对数据进行估计和近似计算)

4. 已知函数 $f(x), g(x)$ 分别由下表给出:

x	1	2	3
$f(x)$	2	1	3

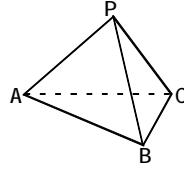
x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则当 $g[f(x)] = 3$ 时, $x = \text{_____}$.

三、空间想象能力

(能力要求:会画简单的几何图形;能准确地分析图形中有关量的相互关系;会运用图形与图表等手段形象地揭示问题的本质)

5. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA = PB = PC = 2 \text{ m}$, $\angle APB = \angle BPC = \angle APC = 30^\circ$, 一只蚂蚁从 A 点出发沿四面体表面绕一周,再回到 A 点,则蚂蚁经过的最短路程是_____m.



四、抽象概括能力

(能力要求:能从具体、生动的实例中,发现研究对象的本质;能从给定的大量信息材料中,概括出一些结论,并能应用于解决问题或作出新的判断)

6. 设 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f(3) = 1$, 则不等式 $f(x) + f(x-8) \leq 2$ 的解集为_____.

五、推理论证能力

(能力要求:会根据已知的事实和已获得的正确数学命题来论证某一数学命题的真实性)

7. 在横线处填上具有相同规律的数: $3, 7, 12, 18, 25, \text{_____}$.

六、实践能力

(能力要求:能够对问题所提供的信息资料进行归纳、整理和分类,将实际问题抽象为数学问题,建立数学模型;能应用相关的数学方法解决问题,并能用数学语言正确地表述、说明)

8. 已知气压 P (百帕)与海拔高度 h (米)的关系式为 $P = 1000 \left(\frac{7}{100}\right)^{\frac{h}{3000}}$, 则海拔 6000 米处的气压为_____百帕.

9. 拟定从甲地到乙地通话 m 分钟时, 电话费是 $f(m) = 1.06(0.5 \times \lfloor m \rfloor + 1)$ 元, 其中 $\lfloor m \rfloor$ 是大于或等于 m 的最小整数, 则通话 5.5 分钟的话费为_____元.

10. 某学校制定奖励条例, 对教学成绩优异的教职工实行奖励, 其中有一个奖励项目是针对高考成绩的高低对任课教师进行奖励, 奖励金额公式为 $f(n) = k(n)(n - 10)$, $n > 10$, 其中 n 是任课教师所在班级学生参加今年高考的学科平均分与该科省平均分之差, $k(n)$ 定义如下:

$$k(n) = \begin{cases} 0, & n \leq 10 \\ 100, & 10 < n \leq 15 \\ 200, & 15 < n \leq 20 \\ 300, & 20 < n \leq 25 \\ 400, & n > 25 \end{cases}$$

(单位:元). 现有甲、乙两位数学教师, 甲所在班高出省平均分 18 分, 而乙所在班高出省平均分 21 分, 则甲比乙的奖金少_____元.

七、创新能力

(能力要求:能够独立思考, 灵活和综合地运用所学数学的知识、思想和方法, 提出问题、分析问题和解决问题)

11. 定义符号函数 $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, 则 $\text{sgn}[-\text{sgn}(2008)] = \text{_____}$.

12. 设 M, P 是两个非空集合, 定义集合 M, P 的差集运算为 $M - P = \{x | x \in M, \text{ 且 } x \notin P\}$, 设集合 $B = \{2, 4, 6, 8\}$, 请你写出一个集合 A 使得 $A - B = \{5\}$, $A = \text{_____}$. (答案不唯一)

(II)综合能力部分

(本部分共 6 道题, 共 90 分)

13. (任选一题作答, 如果两道题都答则按照选做题一给分)(本题满分 10 分)

(选做题一) 已知函数 $f(x) = 3ax + 1 - 2a$ 在 $[-1, 1]$ 上存在零点 x_0 , 且 $x_0 \neq \pm 1$, 求实数 a 的取值范围.

15. (本题满分 15 分)

(1) 甲、乙、丙、丁四个小孩在杨先生家的院子里踢球, 忽然一只花盆被打碎了, 杨先生急忙跑过来询问: “是谁打碎了花盆?” 甲说: “是乙打碎的.” 乙说: “是丁打碎的.” 丙说: “不是我打碎的.” 丁说: “乙在说谎.” 事后知道, 四个小孩中只有一人说了实话, 请问: 说实话的是谁?

16. (本题满分 15 分)

设有两个函数 $y_1 = a^{-3x+1}$ 与 $y_2 = a^{2x-5}$, 要使(1) $y_1 = y_2$; (2) $y_1 < y_2$, 求 x 的取值范围.

17. (本题满分 20 分)

在 2008 年 5 月 12 日四川汶川地震发生后, 中国地震台一开始测定震级为里氏 7.6 级, 随后不久修订为里氏 7.8 级, 18 日再次修订并最终确定为里氏 8.0 级, 那么仅仅里氏 0.4 级的震级差异究竟有多大的不同呢? 下面我们从数学的意义上来解释一下.

已知里氏震级 R 与地震释放的能量 E 的关系为 $R = \frac{2}{3}(\lg E - 11.4)$, 那么里氏 8.0 级的地震释放的能量大约是里氏 7.6 级的地震释放的能量的多少倍? (已知 $10^{0.6} = 3.981$)

14. (本题满分 10 分)

函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在 $[1, 2]$ 上最大值比最小值大 $\frac{a}{3}$, 求实数 a 的值.

错解: 由已知得 $a^2 - a = \frac{a}{3}$, 即 $a^2 = \frac{4}{3}a$, $\therefore a \neq 0$, $\therefore a = \frac{4}{3}$.

上述解法正确吗? 如果认为正确请计算 $a + \frac{5}{6} \log_{27} 27$ 的值; 如果认为错误, 请把正确解答过程写出来.

18. (本题满分 20 分)

函数 $f(x)$ 的定义域为 $D = \{x | x > 0\}$, 且满足对于任意 $x_1, x_2 \in D$, 有 $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

(1) 求 $f(1)$ 的值;
(2) 如果 $f(4) = 1$, $f(3x+1) + f(2x-6) \leq 3$, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 求 x 的取值范围.