《2009 年全国中学生数学能力竞赛高一组(样题)》参考答案

(Ⅰ)基础能力部分

1. 8;2. $[1,+\infty)\cup(-\infty,0)$;3. $[\frac{1}{2},1)\cup(1,+\infty)$;4. 2;5. $2\sqrt{2}$;6. $\{x\mid 8<x\leqslant 9\}$;7. 33;8. 4.9;9. 4.24;10. 1700;11. -1;12. $\{5\}$(答案不唯一).

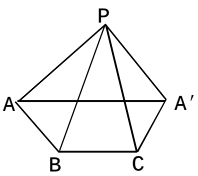
提示:1. 由集合 A,B 之间的运算“*”的含义,且注意到 $x_1\in A$,$x_2\in B$,则要使 $x=x_1+x_2$ 取得最大,只需 x_1,x_2 分别取得最大元素即可,此时 $x_1=5,x_2=3$,则 $x=x_1+x_2$ 最大为 $5+3=8$,所以集合 A*B 中最大的元素是 8.

2. 因为当 $x\geqslant 0$ 时,$x^2+1\geqslant 1$;当 $x<0$ 时,$-x^2<0$.
所以原函数的值域是 $[1,+\infty)\cup(-\infty,0)$.

3. $A=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,$B=[\frac{1}{2},+\infty)$,$A\cap B=[\frac{1}{2},1)\cup(1,+\infty)$.

4. 由表格表示的函数可知 $g(1)=3$,即 $f(x)=1$,得 $x=2$,注意体会表格表示的函数.

5. 沿棱 PA 展开如图所示,蚂蚁经过的最短路程应是 AA',又 $\because \angle APB=\angle BPC=\angle APC=30^\circ$,$\therefore \angle APA'=90^\circ$.



$\because PA=PB=PC=2$,$\therefore AA'=2\sqrt{2}$.

6. $\because$ 函数 $f(x)$ 满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$,$f(3)=1$,
$\therefore 2=1+1=f(3)+f(3)=f(9)$.
于是由 $f(x)+f(x-8)\leqslant 2$ 得 $f(x(x-8))\leqslant f(9)$.
$\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的增函数,$\therefore \begin{cases}x>0\\x-8>0\\x(x-8)\leqslant 9\end{cases}$
解得 $8<x\leqslant 9$. $\therefore$ 不等式解集为 $\{x\mid 8<x\leqslant 9\}$.

7. 观察可知第 2 项比第 1 项大 4,第 3 项比第 2 项大 5,第 4 项比第 3 项大 6,第 5 项比第 4 项大 7,则按此规律第 6 项比第 5 项大 8,即 $25+8=33$.

8. 将 $h=6000$ 代入有 $P=4.9$(百帕).

9. 因为 $m=5.5$,所以 $\langle m\rangle=6$,于是 $f(m)=1.06(0.5\times 6+1)=4.24$.

10. 对甲数学教师来说,$n=18$,于是 $k(n)=200$,所以 $f(n)=200\times(18-10)=1600$,对乙数学教师来说,$n=21$,于是 $k(n)=300$,所以 $f(n)=300\times(21-10)=3300$,于是甲比乙的奖金少 $3300-1600=1700$ 元.

11. $\because 2008>0$,$\therefore \mathrm{sgn}(2008)=1$,$\therefore -\mathrm{sgn}(2008)=-1$,
又 $-1<0$,$\therefore \mathrm{sgn}[-\mathrm{sgn}(2008)]=-1$.

12. 由题意,$5\in A$,且 A 中不再含 $C_U B$ 中的其他任何元素,而是否再含 B 中的各个元素不影响等式 $A-B=\{5\}$,因此 $A=\{5\}$ 或 $\{2,5\}$ 或 $\{2,4,5\}$ 等等.

(Ⅱ)综合能力部分

13. (选做题一)解:当 $a=0$ 时,函数 $f(x)=1$,不合题意;
当 $a\neq 0$ 时,函数 $f(x)$ 的图象是一条直线,
依题意,有 $f(1)\cdot f(-1)<0\Leftrightarrow(a+1)(-5a+1)<0\Leftrightarrow(a+1)(5a-1)>0\Leftrightarrow a<-1$ 或 $a>\frac{1}{5}$. 综上可知,实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{5},+\infty)$.

(选做题二)解:对于命题 p:$|5x-2|>3$,即有 $5x-2>3$ 或 $5x-2<-3$,$\therefore x>1$ 或 $x<-\frac{1}{5}$,因此命题非 p 为:$-\frac{1}{5}\leqslant x\leqslant 1$;命题 q:$\frac{1}{x^2+4x-5}>0$,即 q 为 $x^2+4x-5>0$,
$\therefore x>1$ 或 $x<-5$,
$\therefore$ 非 q 为 $-5\leqslant x\leqslant 1$,即非 p 是非 q 的充分不必要条件.

14. 上述解法是错误的.
正解:当 $a>1$ 时,函数 $f(x)=a^x$ 在 $[1,2]$ 上单调递增,故 $f(x)_{max}=f(2)=a^2$,$f(x)_{min}=f(1)=a^2$,$\therefore a^2-a=\frac{a}{3}$,
得 $a=\frac{4}{3}$. 当 $0<a<1$ 时,
函数 $f(x)=a^x$ 在 $[1,2]$ 上单调递减,
故 $f(x)_{max}=f(1)=a$,$f(x)_{min}=f(2)=a^2$,
$\therefore a-a^2=\frac{a}{3}$,得 $a=\frac{2}{3}$.
综上所述,所求的实数 $a=\frac{4}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$.

15. 解:假设说实话的是甲,则丙说的“不是我打碎的”和丁说的“乙在说谎”也是实话,与题中已知的条件“只有一人说了实话”矛盾,所以甲说的不是实话;假设说实话的是乙,则丙说的“不是我打碎的”也是实话,与题中已知的条件“只有一人说了实话”矛盾,所以乙说的不是实话;假设说实话的是丙,则乙说的“是丁打碎的”和丁说的“乙在说谎”必有一个人说的是实话,与题中已知的条件“只有一人说了实话”矛盾,所以丙说的不是实话;假设说实话的是丁,则甲、乙、丙说的都是假话题,符合已知的条件“只有一人说了实话”,所以说实话的是丁.

16. 解:(1)要使 $a^{-3x+1}=a^{2x-5}$,则 $-3x+1=2x-5$,即 $x=\frac{6}{5}$.
(2)要使 $a^{-3x+1}<a^{2x-5}$,必须分两种情况:
当 $a>1$ 时,只需 $-3x+1<2x-5$,解得 $x>\frac{6}{5}$;
当 $0<a<1$ 时,只需 $-3x+1>2x-5$,解得 $x<\frac{6}{5}$.

17. 解:依题意 $E=10^{\frac{3}{2}R+11.4}$,于是里氏 8.0 级的地震释放的能量为 $E=10^{\frac{3}{2}\times 8+11.4}=10^{23.4}$,
里氏 7.6 级的地震释放的能量为 $E=10^{\frac{3}{2}\times 7.6+11.4}=10^{22.8}$,
故所求结果为 $\frac{10^{23.4}}{10^{22.8}}=10^{0.6}=3.981$.

18. 解:(1)令 $x_1=x_2=1$,有 $f(1\times 1)=f(1)+f(1)$,
解得 $f(1)=0$.
(2)$f(4\times 4)=f(4)+f(4)=2$,$f(16\times 4)=f(16)+f(4)=3$.
$\therefore f(3x+1)+f(2x-6)\leqslant 3$ 即 $f[(3x+1)(2x-6)]\leqslant f(64)$ (*),
$\because f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,$\therefore$ (*)等价于不等式组
$\begin{cases}3x+1>0\\2x-6>0\\(3x+1)(2x-6)\leqslant 64\end{cases}$.
即 $\begin{cases}x>-\frac{1}{3}\\x>3\\-\frac{7}{3}\leqslant x\leqslant 5\end{cases}$ $\therefore 3<x\leqslant 5$.
$\therefore x$ 的取值范围为 $\{x\mid 3<x\leqslant 5\}$.