

# 2011年全国中学生数学能力竞赛高一组(样题)

考试时间:150 分钟 满分:150 分

## (I)基础能力部分

(本部分共 12 道小题,每小题 5 分,共 60 分)

### 一、运算求解能力

(能力要求:会根据法则、公式进行正确的运算、变形;能根据问题的条件,寻找与设计合理、简捷的运算途径)

1. 化简  $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$

2. 已知函数  $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\lg(|x|+x)}$ , 则它的定义域是

3. 方程  $\log_5(3^x+4^x) = \log_4(5^x-3^x)$  的解集为

### 二、数据处理能力

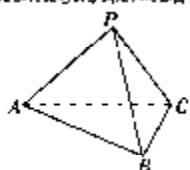
(能力要求:会收集、整理、分析数据,能抽取对研究问题有用的信息,并作出正确的判断;能根据要求对数据进行估计和近似计算)

4. 某市的出租车按如下方法收费:起步价 5 元,可行 3 km (不含 3 km);超过 3 km 按 1.2 元/km 计价(不足 1 km 按 1 km 计算).有一天,老李坐出租车到某地(路程 20 km 多一点),他得付车费 元(精确到 1 元).

### 三、空间想象能力

(能力要求:会画简单的几何图形;能准确地分析图形中有变量的相互关系;会运用图形与图表等手段形象地揭示问题的本质)

5. 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA=PB=PC=2$  m,  $\angle APB = \angle BPC = \angle APC = 30^\circ$ , 一只蚂蚁从  $A$  点出发沿四面体表面绕一周,再回到  $A$  点,则蚂蚁经过的最短路程是 m.



### 四、抽象概括能力

(能力要求:能从具体、生动的实例中,发现研究对象的本质;能从给定的大量信息材料中,概括出一些结论,并能应用于解决问题或作出新的判断)

6. 若函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且对于  $x$  的任意值都有  $f(x+2005) = f(x+2004) + f(x+2006)$ , 则函数  $f(x)$  的周期为

### 五、推理论证能力

(能力要求:会根据已知的事实和已获得的正确数学命题来论证某一数学命题的真实性)

7. 某校 6 名同学参加市数学竞赛,共获 1 个一等奖,5 个二等奖,其中有 4 位老师 A、B、C、D 对这 6 名同学的获奖情况猜测如下:  
A:3 号同学不可能获一等奖;  
B:4、5、6 号都不可能获一等奖;  
C:获一等奖的应是 1 号或 2 号同学;  
D:获一等奖的应是 4、5、6 号同学中的 1 个.  
实际结果表明,4 位老师中恰有 1 人猜对了,那么获一等奖的学生是 号同学.

### 六、实践能力

(能力要求:能够对问题所提供的信息资料进行归纳、整理和分类,将实际问题抽象为数学问题,建立数学模型;能应用相关的数学方法解决问题,并能用数学语言正确地表述、说明)

8. 已知正五边形广场  $ABCDE$  的周长为 2000 米,甲、乙两人分别从  $A$ 、 $C$  两点同时出发,沿  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow \dots$  方向绕广场行走,甲的速度为 50 米/分,乙的速度为 46 米/分,那么,出发后经过 分钟,甲、乙两人第一次开始行走在同一条边上.

9. 如果甲的身高或体重数至少有一项比乙大,则称甲不亚于乙,在 100 个小伙子中如果某人不少于其它 99 人,就称它为棒小伙子,那么,100 个小伙子中的棒小伙子最多

可能有 个.

10. 设  $5\text{cm} \times 4\text{cm} \times 3\text{cm}$  长方体的一个表面展开图的周长为  $p\text{cm}$ , 则  $p$  的最小值是

### 七、创新意识

(能力要求:能够独立思考,灵活和综合地运用所学数学的知识、思想和方法,提出问题、分析问题和解决问题)

11. 拟定从甲地到乙地通话  $m$  分钟的电话费为  $f(m) = 1.06 \times (0.50 \times [m] + 1)$ , 其中  $m > 0$ ,  $[m]$  表示不超过  $m$  的最大整数,则从甲地到乙地通话时间为 5.5 分钟的通话费为 元.

12. 一个学校中有 2001 个学生,每人都学习法语或西班牙语,其中学习西班牙语的学生数在总人数中所占的比例介于 80% 与 85% 之间;学习法语的学生数在总人数中所占的比例介于 30% 与 40% 之间,设两门都学的学生数的最小值为  $m$ ,最大值为  $M$ ,则  $M - m$  的值为

## (II)综合能力部分

(本部分共 6 道题,共 90 分)

13. (本题满分 10 分)

函数  $f(x)$  对任意非负实数  $x, y$  满足  $f(x+y^2) = f(x) + 2[f(y)]^2$ , 且  $f(x) \geq 0, f(1) \neq 0$ , 求  $f(2+\sqrt{3})$  的值.

16. (本题满分 15 分)

使函数  $f(x) = (a-x)x - 3a$  在  $(-\infty, b]$  上取得最小值  $(-4a+3)$  的  $x$  的值有且只有两个,求实数  $a, b$  的值.

17. (本题满分 20 分)

二次函数  $f(x) = px^2 + qx + r$  中实数  $p, q, r$  满足  $\frac{p}{m+2} + \frac{q}{m+1} + \frac{r}{m} = 0$ , 其中  $m >$

0. 求证: (1)  $p \cdot f\left(\frac{m}{m+1}\right) < 0$ ;

(2) 方程  $f(x) = 0$  在  $(0, 1)$  内恒有解.

18. (本题满分 20 分)

已知定义域为  $[0, 1]$  的函数  $f(x)$  同时满足以下三个条件:

[1] 对任意的  $x \in [0, 1]$ , 总有  $f(x) \geq 0$ ;

[2]  $f(1) = 1$ ;

[3] 若  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ , 且  $x_1 + x_2 \leq 1$ , 则有  $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$  成立, 并且称  $f(x)$  为“友谊函数”.

请解答下列各题:

(1) 若已知  $f(x)$  为“友谊函数”, 求  $f(0)$  的值;

(2) 函数  $g(x) = 2^x - 1$  在区间  $[0, 1]$  上是否为“友谊函数”? 并给出理由.

(3) 已知  $f(x)$  为“友谊函数”, 假定存在  $x_0 \in [0, 1]$ , 使得  $f(x_0) \in [0, 1]$  且  $f[f(x_0)] = x_0$ , 求证:  $f(x_0) = x_0$ .

14. (本题满分 10 分)

设  $f(x) = x^2 - x + k$ , 若  $\log_3 f(a) = 2, f(\log_3 a) = k(a > 0$  且  $a \neq 1)$ , 求使  $f(\log_3 x) > f(1)$  且  $\log_3 f(x) < f(1)$  成立的  $x$  的取值范围.

15. (本题满分 15 分)

亚历克斯·怀特有两个妹妹:贝尔和卡斯;亚历克斯·怀特的女友费伊·布莱克有两个弟弟:迪安和埃兹拉.他们的职业分别是:亚历克斯:舞蹈家;迪安:舞蹈家;怀特家贝尔:舞蹈家;布莱克家埃兹拉:歌唱家;卡斯:歌唱家;费伊:歌唱家.六人中有一位担任了一部电影的主角;其余五人中有一位是该片的导演.

(1) 如果主角和导演是亲属,则导演是个歌唱家.

(2) 如果主角和导演不是亲属,则导演是位男士.

(3) 如果主角和导演职业相同,则导演是位女士.

(4) 如果主角和导演职业不同,则导演姓怀特.

(5) 如果主角和导演性别相同,则导演是个舞蹈家.

(6) 如果主角和导演性别不同,则导演姓布莱克.

谁担任了电影主角?

编辑总监:陈伍莲 发行总监:陈石林  
责任编辑:徐 坤(email: xk\_wu@163.com)  
美术编辑:李 雪