《2011年全国中学生数学能力竞赛(初赛)试题初二年级组》参考答案

一、画龙点睛(本大题共8道小题,每小题3分,总计24分)

1. $a+b+c$　2. 2025078　3. 40　4. 72.5°　5. 2　6. 4　7. 37.2　8. 3

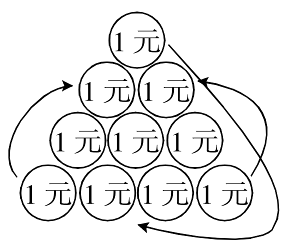
二、一锤定音(本大题共4道小题,每小题3分,总计12分)

9. B　10. A　11. A　12. D

三、妙笔生花(本大题共4道小题,13题6分,14题7分,15题8分,16题9分,总计30分)

13. 至少需要移动3枚硬币. …… 2分

如图所示:



…… 6分

14. 我们先不考虑6米、9米、12米、15米、21米、27米、30米,因为这些型号水管都是3米的倍数,因此本题转化成求 $3x+19y=50$ 的正整数解.而该方程的正整数解为 $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$,所以需要19米水管2根,4根3米水管.而4根3米水管恰好可由1根12米水管代替.所以应该采购19米水管2根、12米水管1根. …… 7分

15. (1)$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$; …… 2分

(2)证明:$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$; …… 5分

(3)原式 $=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}=1-\frac{1}{2010}=\frac{2009}{2010}$. …8分

16. $A+B=16,B+C=20,C+D=34,\because A<B<C<D,\therefore A<8,B>8,B<10,C>10,C<17,D>17$. …… 4分

由 $8<B<10$ 且 B 只能取整数,得 $B=9$. …… 6分

$\therefore C=11,D=23,A=7$. …… 8分

答:A,B,C,D 各班演员人数分别是7人、9人、11人、23人. …… 9分

四、一鼓作气(本大题共2道小题,17题12分,18题12分,总计24分)

17. (1)根据题意知,调配给甲连锁店电冰箱$(70-x)$台, 调配给乙连锁店空调机$(40-x)$台,电冰箱$(x-10)$台. …… 2分

则 $y=200x+170(70-x)+160(40-x)+150(x-10)$,

即 $y=20x+16800$. …… 4分

$\because \begin{cases}x\geqslant 0,\\70-x\geqslant 0,\\40-x\geqslant 0,\\x-10\geqslant 0,\end{cases}$ $\therefore 10\leqslant x\leqslant 40,\therefore y=20x+16800\ (10\leqslant x\leqslant 40)$; …… 6分

(2)按题意知:$y=(200-a)x+170(70-x)+160(40-x)+150(x-10)$,

即 $y=(20-a)x+16800(10\leqslant x\leqslant 40)$. ………………………………………………… 8分

$\because 200-a>170$,$\therefore a<30$. ………………………………………………………… 9分

当 $0<a<20$ 时,取 $x=40$,即调配给甲连锁店空调机 40 台,电冰箱 30 台,乙连锁店空调 0 台,电冰箱 30 台; ………………………………………………………………… 10分

当 $a=20$ 时,x 的取值在 $10\leqslant x\leqslant 40$ 内的所有方案利润相同; ……………………… 11分

当 $20<a<30$ 时,取 $x=10$,即调配给甲连锁店空调机 10 台,电冰箱 60 台,乙连锁店空调 30 台,电冰箱 0 台. ………………………………………………………………… 12分

18. (1) 证明:$\because x^2=x+1$,$y^2=y+1$,$\therefore x^2-y^2=(x+y)(x-y)=x-y$,$\because x\neq y$,$\therefore x+y=1$;
……………………………………………………………………………………… 4分

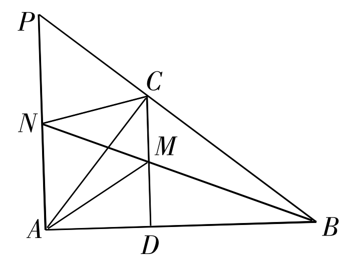
(2) $\because x^2=x+1$,$y^2=y+1$,$\therefore x^3=x^2+x$,$y^3=y^2+y$, ……………………………… 6分

$x^4=x^3+x^2$,$y^4=y^3+y^2$, ……………………………………………………………… 7分

$x^5=x^4+x^3$,$y^5=y^4+y^3$, ……………………………………………………………… 8分

$\therefore x^5+y^5=x^4+x^3+y^4+y^3=x^3+x^2+x^2+x+y^3+y^2+y^2+y=x^2+x+x^2+x^2+x+y^2+y+y^2+y^2+y=3(x^2+y^2)+2(x+y)=3(x+1+y+1)+2(x+y)=3\times 3+2=11$. … 12分

五、再接再厉(本大题总计 15 分)



19. 证明:过 A 作 CD 的平行线,交 BC 的延长线于点 P, 交 BM 的延长线于点 N,连接 CN. ……………………………………………… 3分

$\because CM=MD$,$\therefore PN=NA$, ……………………………………………… 4分

$\because \angle PCA=90°$,$\therefore CN=PN=NA$.$\therefore \angle ACD=\angle CAN=\angle NCA$,

$\therefore \angle NCM=2\angle ACD$.(1) ………………………………………………… 7分

$\because \angle MAN=\angle AMD=\angle BMD=\angle MNA$,$\therefore MA=MN$. …… 10分

$\because MD=MC$,$\angle AMD=\angle BMD=\angle NMC$,$MA=MN$,

$\therefore \triangle MAD\cong\triangle MNC$,$\therefore \angle ADM=\angle NCM$.(2) ……………………………………… 13分

由(1)与(2)得 $\angle CDA=2\angle ACD$. ………………………………………………………… 15分

六、马到成功(本大题总计 15 分)

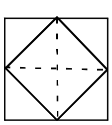
20. 以棋盘上竖线和横线为边的正方形,这些都是“正放”的正方形.

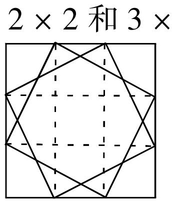
1×1 的正方形有 $8\times 9=72$(个);2×2 的正方形有 $7\times 8=56$(个);3×3 的正方形有 $6\times 7=42$(个);4×4 的正方形有 $5\times 6=30$(个);5×5 的正方形有 $4\times 5=20$(个);6×6 的正方形有 $3\times 4=12$(个);7×7 的正方形有 $2\times 3=6$(个);8×8 的正方形有 $1\times 2=2$(个). … 4分

因此,“正放”的正方形共有 $72+56+42+30+20+12+6+2=240$(个). ………… 6分

以棋盘上交叉点为顶点的“斜放”.每个这样“斜放”的正方形总是内接于一个上面那种“正放”的正方形. 1×1 的“正放”正方形中不可能有这样的内接“斜放 ”正方形.

如下图所示是 2×2 和 3×3“正放”正方形中的“斜放”正方形.





所以每个 2×2 的正方形中有 1 个这样的“斜放”正方形;每个 3×3 的正方形中有 2 个这样的“斜放”正方形;…;每个 8×8 的正方形中有 7 个这样的“斜放”正方形. ……………… 13分

因此,“斜放” 正方形共有 $1\times 56+2\times 42+3\times 30+4\times 20+5\times 12+6\times 6+7\times 2=420$(个).

所以共能连成 $240+420=660$(个)正方形. ………………………………………… 15分