

《2011 年全国中学生数学能力竞赛(初赛)试题 初三年级组》参考答案

一、画龙点睛(本大题共 8 道小题,每小题 3 分,总计 24 分)

1. 9900 2. 12 3. 8 4. $\frac{k^2-1}{2}, \frac{k^2+1}{2}$ (每空 1.5 分)

5. $-\frac{3}{2}$ 6. 2 7. 9 8. $n(n+2)$

二、一锤定音(本大题共 4 道小题,每小题 3 分,总计 12 分)

9. D 10. B 11. C 12. C

三、妙笔生花(本大题共 4 道小题,13 题 6 分,14 题 7 分,15 题 8 分,16 题 9 分,总计 30 分)

13. (1) $\because P(\text{小明去听讲座}) = \frac{3}{5}, P(\text{妹妹去听讲座}) = \frac{2}{5}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$\therefore P(\text{小明去听讲座}) \neq P(\text{妹妹去听讲座}), \therefore \text{这个办法不公平}; \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

(2) 根据题意,得 $3x - 3 = 2x$,解得 $x = 3$.

$\therefore$ 当 $x > 3$ 时对小明有利;当 $x < 3$ 时对妹妹有利;当 $x = 3$ 时游戏公平. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

14. 将 $a = 4 + 2b$ 代入 $ab + c^2 - 1 = 0$,得 $2b^2 + 4b + c^2 - 1 = 0, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$\therefore b = \frac{-2 \pm \sqrt{6-2c^2}}{2}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$\because b, c$ 都是整数, $\therefore$ 只能取 $\begin{cases} b_1 = 0, \\ c_1 = 1; \end{cases} \begin{cases} b_2 = 0, \\ c_2 = -1; \end{cases} \begin{cases} b_3 = -2, \\ c_3 = 1; \end{cases} \begin{cases} b_4 = -2, \\ c_4 = -1. \end{cases} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

相对应 $a_1 = 4, a_2 = 4, a_3 = 0, a_4 = 0$.

故所求 $a + b + c$ 的值有 4 个,分别为 5, 3, -1, -3. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

15. 用 O 表示没有提到的那个按钮,根据叙述,可知这 6 个按钮的排列顺序为 $DECAOB$,因此应该按从左往右数第 5 个按钮,或从右往左数第 2 个按钮. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

16. (1) $4 \times 6 - 5^2 = 24 - 25 = -1; \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

(2) 答案不唯一,如 $n(n+2) - (n+1)^2 = -1$ (n 是大于 0 的整数); $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(3) 成立. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

理由: $n(n+2) - (n+1)^2 = n^2 + 2n - (n^2 + 2n + 1) = n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1 = -1. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

四、一鼓作气(本大题共 2 道小题,17 题 12 分,18 题 12 分,总计 24 分)

17. (1) 答案不唯一,当取出的是⑦时,将剩下的图形向上平移 1cm(如图 1);

当取出的是⑤时,将⑥⑦向上平移 2cm(如图 2);(两个答案均可)

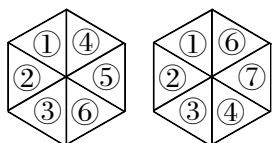


图 1

图 2

$\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 能. 理由: 因为每个小等边三角形的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$, 五个小等边三角形的面积和为

$$\frac{5\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2,$$

正六边形的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$, 10 分

而 $\frac{5\sqrt{3}}{4} < \frac{5}{2} < \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 所以正六边形没有被取出的三角形盖住的面积能等于 $\frac{5}{2}\text{cm}^2$.

..... 12 分

18. (1)由题意得 $400 \times (2x + \frac{400}{x}) + 300 \times \frac{400}{x} + 200 \times 80 = 47200$, 2 分

化简得 $x^2 - 39x + 350 = 0$, 解得 $x_1 = 14, x_2 = 25$ 4 分

经检验 $x_1 = 14, x_2 = 25$ 都是原方程的根, 但 25 米 > 16 米(不合题意, 应舍去). 5 分

当池长为 14 米时, 池宽为 $\frac{100}{7}$ 米 < 16 米, 符合题意, 所以池长为 14 米; 6 分

(2)以 47200 元为总造价来修建三级污水处理池, 不是最合算. 7 分

理由: 当池长为 16 米时, 池宽为 12.5 米 < 16 米, 故池长为 16 米, 符合题意. 8 分

这时总造价为 $800 \times 16 + \frac{400 \times 700}{16} + 200 \times 80 = 46300 < 47200$,

∴ 当以 47200 元为总造价来修建三级污水处理池时, 不是最合算. 12 分

五、再接再厉(本大题总计 15 分)

19. 根据(II), 从这八条虚假供词的反面可以得出以下八条真实的情况:

(1)这四人中的一人杀了医生. 1 分

(2)高森离开医生家的时候, 医生已经死了. 2 分

(3)白林不是第二个去医生家的. 3 分

(4)白林到达医生家的时候, 医生仍然活着. 4 分

(5)郎东不是第三个去医生家的. 5 分

(6)郎东离开医生家的时候, 医生已经死了. 6 分

(7)凶手是在戴瓜去医生家里之后去的. 7 分

(8)戴瓜到达医生家的时候, 医生仍然活着. 8 分

根据这里的真实情况(1)(4)(8)(2)和(6), 知白林和戴瓜是在高森和郎东之前去医生家的.

..... 10 分

根据真实情况(3), 知戴瓜是第二个去的, 从而白林是第一个去的. 11 分

根据真实情况(5), 知高森是第三个去的, 从而郎东是第四个去的. 12 分

医生在第二个人到达的时候还活着, 但在第三个人去他那儿离开的时候已经死了. 因此, 根据真实情况(1), 知杀害医生的是高森或戴瓜. 14 分

根据真实情况(7), 知高森杀害了医生. 15 分

六、马到成功(本大题总计 15 分)

20. 因为 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ (袋), 所以共拿出来 55 袋. 6 分

又因为这 55 袋大米应重 $55 \times 800 = 44000$ (克), 而实际上这些大米重 43800 克, $44000 - 43800 = 200$ (克), 所以 $200 \div 50 = 4$ (袋). 14 分

所以重量不足的是 4 号箱里的大米. 15 分