

《2011 年全国中学生数学能力竞赛(初赛)试题 高一年级组》参考答案

基础能力部分(共 60 分,每题 5 分)

一、运算求解能力

1. 2009 或 2013

2. -4

3. 99.5

二、数据处理能力

4. 甲

三、空间想象能力

5. 无数

四、抽象概括能力

6. $\varphi(x), h(x), f(x), g(x)$

五、推理论证能力

7. (2)、(4)

六、实践能力

8. $\frac{900}{59}$

9. 6

10. 4

七、创新意识

11. 56

12. 43

综合能力部分(共 90 分)

13. 解: $\because x_1, x_2$ 是 $x^2 - 2(m-1)x + m+1 = 0$ 的两个实根,

$\therefore \Delta = 4(m-1)^2 - 4(m+1) \geq 0$, 解得 $m \leq 0$ 或 $m \geq 3$ (2 分)

又 $\because x_1 + x_2 = 2(m-1), x_1 \cdot x_2 = m+1$,

$\therefore y = f(m) = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4m^2 - 10m + 2$, (6 分)

即 $y = f(m) = 4m^2 - 10m + 2 (m \leq 0 \text{ 或 } m \geq 3)$ (10 分)

14. 解: (1) $0 \leq a < b$ 时,
$$\begin{cases} 2b = f(a) = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2} \\ 2a = f(b) = -\frac{1}{2}b^2 + \frac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}; \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

(2) $a < 0 < b$ 时,
$$\begin{cases} 2b = f(0) = \frac{13}{2} \Rightarrow b = \frac{13}{4} \\ 2a = f(a) = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2} \Rightarrow a = -2 - \sqrt{17} \end{cases}; \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

(3) $a < b \leq 0$ 时,
$$\begin{cases} 2a = f(a) = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2} \\ 2b = f(b) = -\frac{1}{2}b^2 + \frac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{无均小于零的两根.} \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

综上, 所求区间为 $[1, 3]$ 或 $[-2 - \sqrt{17}, \frac{13}{4}]$ (10 分)

15. 海尔丁要抓第二个进他房间的男人. (5 分)

因为如果这个男人认为这是他自己的房间, 那么进去时是不会敲门的. (15 分)

16. 解: 设 $u = f(x) - x^2 + x$,

由题意知, $f(u) = u$.

已知有且只有一个实数 x_0 , 使得 $f(x_0) = x_0$,

所以 $u = x_0, f(x) - x^2 + x = x_0$, (5 分)

$f(x_0) - x_0^2 + x_0 = x_0, x_0^2 = x_0$, (8 分)

$x_0 = 0$ 或 $x_0 = 1$ (10 分)

当 $x_0 = 0$ 时, $f(x) = x^2 - x$, $f(x) = x$ 的解有两个, 不合题意, 舍去; (12 分)

当 $x_0 = 1$ 时, $f(x) = x^2 - x + 1$, $f(x) = x$ 的解只有一个. (14 分)

所以 $f(x) = x^2 - x + 1$ (15 分)

17. 解: (1) 设 $0 < x_1 < x_2 < 1$, $f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_2}{1+x_2^2} = \frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} < 0$,

$\therefore (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$; (2 分)

同理: 若 $0 < x_2 < x_1 < 1$, 有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$; (3 分)

若 $0 < x_1 = x_2 < 1$, 有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] = 0$ (4 分)

$\therefore (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \geq 0$; (6 分)

(2) $\because a + b + c = 1$ 且 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$,

$\therefore 0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$.

由(1)得 $(a - \frac{1}{3})[f(a) - f(\frac{1}{3})] \geq 0$,

$\therefore (a - \frac{1}{3})(\frac{a}{1+a^2} - \frac{3}{10}) \geq 0$,

$\therefore \frac{a^2 - \frac{1}{3}a}{1+a^2} \geq \frac{3}{10}(a - \frac{1}{3})$, 即 $\frac{3a^2 - a}{1+a^2} \geq \frac{9}{10}(a - \frac{1}{3})$ (12 分)

同理 $\frac{3b^2 - b}{1+b^2} \geq \frac{9}{10}(b - \frac{1}{3})$, $\frac{3c^2 - c}{1+c^2} \geq \frac{9}{10}(c - \frac{1}{3})$, (16 分)

$\therefore u \geq \frac{9}{10}(a - \frac{1}{3} + b - \frac{1}{3} + c - \frac{1}{3}) = 0$,

$\therefore u$ 的最小值为 0. (20 分)

18. (1) 证明: $\because x, y$ 均为正数, 且 $0 < a < 1$,

根据指数函数性质可知, 总有实数 m, n 使得 $x = a^m, y = a^n$,

于是 $f(xy) = f(a^m a^n) = f(a^{m+n}) = (m+n)f(a) = m+n$ (3 分)

$$\text{又 } f(x) + f(y) = f(a^m) + f(a^n) = mf(a) + nf(a) = m + n,$$

$$\therefore f(xy) = f(x) + f(y). \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$(2)\text{证明:任设 } x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+, x_1 > x_2, \text{可令 } x_1 = x_2 t (t > 1), t = a^\alpha (\alpha < 0). \quad \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

$$\text{则由(1)知 } f(x_1) - f(x_2) = f(x_2 t) - f(x_2) = f(x_2) + f(t) - f(x_2) = f(t) = f(a^\alpha) = \alpha f(a) = \alpha < 0, \\ \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\text{即 } f(x_1) < f(x_2). \therefore f(x) \text{ 在正实数集上单调递减.} \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

$$(3)\text{解:令 } \log_a(4-x) = t, \text{原不等式化为 } f(t^2+2) - f(8t) \leq 3, \text{其中 } t > 0.$$

$$\therefore f(x) - f(y) = f(x) + f(y^{-1}) = f\left(\frac{x}{y}\right), \text{且 } f(a) = 1 (0 < a < 1),$$

$$\text{不等式可进一步化为 } f\left(\frac{t^2+2}{8t}\right) \leq f(a^3). \quad \dots\dots\dots (14 \text{ 分})$$

$$\text{又由于单调递减, } \therefore \frac{t^2+2}{8t} \geq a^3 \text{ 对于 } t > 0 \text{ 恒成立.} \quad \dots\dots\dots (15 \text{ 分})$$

$$\text{而 } \frac{t^2+2}{8t} = \frac{1}{8} \left[\left(\sqrt{t} - \sqrt{\frac{2}{t}} \right)^2 + 2\sqrt{2} \right] \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \dots\dots\dots (17 \text{ 分})$$

$$\text{且当 } t = \sqrt{2} \text{ 时, } \left(\frac{t^2+2}{8t} \right)_{\text{最小值}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \quad \dots\dots\dots (18 \text{ 分})$$

$$\therefore a^3 \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}, \text{又 } 0 < a < 1, \text{解得 } 0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \dots\dots\dots (20 \text{ 分})$$