

《2011 年全国中学生数学能力竞赛(初赛)试题 高二年级组》参考答案

基础能力部分(共 60 分,每题 5 分)

一、运算求解能力

1. 24 2. $\frac{5}{7}$ 3. $x + y - 4 = 0$

二、数据处理能力

4. 3 个 5. $\frac{31}{32}$

三、空间想象能力

6. B

四、抽象概括能力

7. C 8. B

五、推理论证能力

9. 312211 10. 254

六、实践能力

11. 440

七、创新意识

12. 1

综合能力部分(共 90 分)

13. 第(2),(3)正确

解析:报考 A 大学的记为 A,没报考 A 大学的记为 $\neg A$;

报考 B 大学的记为 B,没报考 B 大学的记为 $\neg B$; 报考 C 大学的记为 C,没报考 C 大学的记为 $\neg C$; 报考 D 大学的记为 D,没报考 D 大学的记为 $\neg D$; 由已知条件得: $A \Rightarrow \neg B, B \Rightarrow D, C \Rightarrow \neg D, \neg C \Rightarrow B$, 由互为逆否命题的等价性知: $B \Rightarrow \neg A, \neg D \Rightarrow \neg B, D \Rightarrow \neg C, \neg B \Rightarrow C$.

$\therefore$ (1) $D \Rightarrow \neg C, \neg C \Rightarrow B, B \Rightarrow \neg A$, $\therefore$ 第(1)个命题不正确.

(2) 由 $B \Rightarrow D, D \Rightarrow \neg C$ 知第(2)个命题正确.

(3)由 $D \Rightarrow \neg C, \neg C \Rightarrow B$ 及 $B \Rightarrow D$ 可知 B, D 可互推,所以第(3)个命题正确.

14. 解析: 因为 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 1 - 2\sin^2 x = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \pi$.

$$\text{由 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

得 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}], k \in \mathbf{Z}$.

(2)根据条件得 $g(x) = 2\sin(4x + \frac{5\pi}{6})$, 当 $x \in [0, \frac{\pi}{8}]$ 时, $4x + \frac{5\pi}{6} \in [\frac{5\pi}{6}, \frac{4}{3}\pi]$,

所以当 $x = \frac{\pi}{8}$ 时, $g_{\min}(x) = -\sqrt{3}$.

15. 解析: (1)①若 $1 - a^2 = 0$, 即 $a = \pm 1$,

1)当 $a = 1$ 时, $f(x) = \sqrt{6}$, 定义域为 $\mathbf{R}$, 适合;

2)当 $a = -1$ 时, $f(x) = \sqrt{6x+6}$, 定义域不为 $\mathbf{R}$, 不适合;

②若 $1 - a^2 \neq 0$, $g(x) = (1 - a^2)x^2 + 3(1 - a)x + 6$ 为二次函数,

$\therefore f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$, $\therefore g(x) \geq 0$ 恒成立,

$$\therefore \begin{cases} 1 - a^2 > 0 \\ \Delta = 9(1 - a)^2 - 24(1 - a^2) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < a < 1 \\ (a - 1)(11a + 5) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{5}{11} \leq a < 1;$$

综合①、②得 a 的取值范围为 $[-\frac{5}{11}, 1]$

(2)命题等价于不等式 $(1 - a^2)x^2 + 3(1 - a)x + 6 \geq 0$ 的解集为 $[-2, 1]$,

显然 $1 - a^2 \neq 0$

$\therefore 1 - a^2 < 0$ 且 $x_1 = -2, x_2 = 1$ 是方程 $(1 - a^2)x^2 + 3(1 - a)x + 6 = 0$ 的两根,

$$\therefore \begin{cases} a < -1 \text{ 或 } a > 1 \\ x_1 + x_2 = \frac{3(a-1)}{1-a^2} = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{6}{1-a^2} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < -1 \text{ 或 } a > 1 \\ a^2 - 3a + 2 = 0, \text{解得 } a \text{ 的值为 } a = 2. \\ a^2 = 4 \end{cases}$$

16. 解析: (1)由于 $C(n)$ 在各段上都是单调增函数,因此在每一段上不存在买多于 n 本书比恰好买 n 本书所花钱少的问题,一定是在各段分界点附近因单价的差别造成买多于 n 本书比恰

好买 n 本书所花钱少的现象.

$$C(25) = 11 \times 25 = 275, C(23) = 12 \times 23 = 276, \therefore C(25) < C(23)$$

$$C(24) = 12 \times 24 = 288, \therefore C(25) < C(24)$$

$$C(49) = 49 \times 10 = 490, C(48) = 11 \times 48 = 528, \therefore C(49) < C(48)$$

$$C(47) = 11 \times 47 = 517, \therefore C(49) < C(47)$$

$$C(46) = 11 \times 46 = 506, \therefore C(49) < C(46)$$

$$C(45) = 11 \times 45 = 495, \therefore C(49) < C(45)$$

$\therefore$ 这样的 n 有 23, 24, 45, 46, 47, 48

(2) 设甲买 n 本书, 则乙买 $60 - n$ 本, 且 $n \leq 30, n \in \mathbf{N}^*$ (不妨设甲买的书少于或等于乙买的书)

① 当 $1 \leq n \leq 11$ 时, $49 \leq 60 - n \leq 59$

$$\text{出版公司所得的钱数 } f(n) = 12n + 10(60 - n) - 5 \times 60 = 2n + 300$$

② 当 $12 \leq n \leq 24$ 时, $36 \leq 60 - n \leq 48$,

$$\text{出版公司所得的钱数 } f(n) = 12n + 11(60 - n) - 5 \times 60 = n + 360$$

③ 当 $25 \leq n \leq 30$ 时, $30 \leq 60 - n \leq 35$,

$$\text{出版公司所得的钱数 } f(n) = 11 \times 60 - 5 \times 60 = 360$$

$$\therefore f(n) = \begin{cases} 2n + 300, & 1 \leq n \leq 11 \\ n + 360, & 12 \leq n \leq 24 \\ 360, & 25 \leq n \leq 30 \end{cases}$$

$\therefore$ 当 $1 \leq n \leq 11$ 时, $302 \leq f(n) \leq 322$

当 $12 \leq n \leq 24$ 时, $372 \leq f(n) \leq 384$

当 $25 \leq n \leq 30$ 时, $f(n) \leq 360$

$\therefore$ 出版公司至少能得 302 元, 最多能得 384 元.

17. 解析: (1) 当 $n = 1, a_1 = S_1 = k + 1$,

$$n \geq 2, a_n = S_n - S_{n-1} = kn^2 + n - [k(n-1)^2 + (n-1)] = 2kn - k + 1$$

经验, $n = 1$, 上式成立, $\therefore a_n = 2kn - k + 1$

(2) $\because a_m, a_{2m}, a_{4m}$ 成等比数列, $\therefore a_{2m}^2 = a_m \cdot a_{4m}$,

即 $(4km - k + 1)^2 = (2km - k + 1)(8km - k + 1)$,整理得: $mk(k - 1) = 0$,

对任意的 $m \in \mathbf{N}^*$ 成立, $\therefore k = 0$ 或 $k = 1$

18. 解析: (1) 设 a_n, b_n 分别为第 n 年投入的电力型公交车、混合动力型公交车的数量, 由题意 $\{a_n\}$ 是首项为 128, 公比为 $1 + 50\% = \frac{3}{2}$ 的等比数列. $\{b_n\}$ 是首项为 400, 公差为 a 的等差数列.

$$\{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } S_n = \frac{128[1 - (\frac{3}{2})^n]}{1 - \frac{3}{2}} = 256 [(\frac{3}{2})^n - 1]. \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } T_n = 400n +$$

$$\frac{n(n-1)}{2}a, \text{ 所以经过 } n \text{ 年, 该市更换的公交车总数为 } S(n) = S_n + T_n = 256[(\frac{3}{2})^n - 1] + 400n + \frac{n(n-1)}{2}a.$$

(2) 若计划 7 年内完成全部更换, 所以 $S(7) \geq 10000$, 即

$$S(7) = 256[(\frac{3}{2})^7 - 1] + 400 \times 7 + \frac{7(7-1)}{2}a \geq 10000, \text{ 即 } 21a \geq 3082, a \geq 146\frac{16}{21},$$

又 $\because a \in \mathbf{N}^*, \therefore a$ 的最小值为 147.