

《2011 年全国中学生数学能力竞赛(初赛)试题 高三年级组》参考答案

基础能力部分(共 60 分,每题 5 分)

一、运算求解能力

1. $\frac{1}{2}$ 2. $[\frac{1}{5}, +\infty)$ 3. $x + y - 3 = 0$

二、数据处理能力

4. 78

三、空间想象能力

5. $8 - \frac{2\pi}{3}$ 6. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

四、抽象概括能力

7. $n + (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (3n - 2) = (2n - 1)^2$

五、推理论证能力

8. 2 9. ②④

六、实践能力

10. 1.

七、创新意识

11. ①②.

12. $\frac{5}{16}$.

综合能力部分（共 90 分）

13. 解析：(1) X 可能的取值为 0, 1, 2, 3, 4, 且

$$P(X = 0) = \frac{1}{C_8^4} = \frac{1}{70},$$

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 C_4^3}{C_8^4} = \frac{8}{35},$$

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 C_4^2}{C_8^4} = \frac{18}{35},$$

$$P(X = 3) = \frac{C_4^3 C_4^1}{C_8^4} = \frac{8}{35},$$

$$P(X = 4) = \frac{1}{C_8^4} = \frac{1}{70}.$$

即 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{70}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{1}{70}$

X 的数学期望为

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{70} + 1 \times \frac{8}{35} + 2 \times \frac{18}{35} + 3 \times \frac{8}{35} + 4 \times \frac{1}{70} = 2.$$

(2) 品种甲的每公顷产量的样本平均数和样本方差分别为：

$$\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{1}{8}(403 + 397 + 390 + 404 + 388 + 400 + 412 + 406) = 400,$$

$$s_{\text{甲}}^2 = \frac{1}{8}(3^2 + (-3)^2 + (-10)^2 + 4^2 + (-12)^2 + 0^2 + 12^2 + 6^2) = 57.25$$

品种乙的每公顷产量的样本平均数和样本方差分别为：

$$\bar{x}_Z = \frac{1}{8}(419 + 403 + 412 + 418 + 408 + 423 + 400 + 413) = 412,$$

$$s_Z^2 = \frac{1}{8}(7^2 + (-9)^2 + 0^2 + 6^2 + (-4)^2 + 11^2 + (-12)^2 + 1^2) = 56.$$

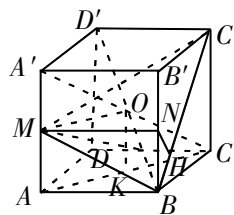
由以上结果可以看出,品种乙的样本平均数大于品种甲的样本平均数,且两品种的样本方差差异不大,故应该选择种植品种乙.

14. 解析: (1) 连结 AC , 取 AC 的中点 K , 则 K 为 BD 的中点, 连结 OK .

因为点 M 是棱 AA' 的中点, 点 O 是 BD' 的中点,

$$\text{所以 } AM \parallel \frac{1}{2}DD' \parallel OK.$$

$$\text{所以 } MO \parallel AK.$$



$AA' \perp AK$, 得 $MO \perp AA'$.

因为 $AK \perp BD$, $AK \perp BB'$, 所以 $AK \perp$ 平面 $BDD'B'$,

所以 $AK \perp BD'$, 所以 $MO \perp BD'$.

又因为 OM 与异面直线 AA' 和 BD' 都相交,

故 OM 为异面直线 AA' 和 BD' 的公垂线.

(2) 取 BB' 的中点 N , 连结 MN , 则 $MN \perp$ 平面 $BCC'B'$,

过点 N 作 $NH \perp BC'$ 于 H , 连结 MH ,

则由三垂线定理得, $BC' \perp MH$.

从而, $\angle MHN$ 为二面角 $M-BC'-B'$ 的平面角.

$$MN = 1, NH = BN \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

在 $\text{Rt}\triangle MNH$ 中, $\tan \angle MHN = \frac{MH}{NH} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = 2\sqrt{2}$.

故二面角 $M-BC'-B'$ 的大小为 $\arctan 2\sqrt{2}$.

(3) 易知,

$S_{\triangle OA'D'} = S_{\triangle OCB}$, 且 $\triangle OBC$ 和 $\triangle OA'D'$ 都在平面 $BCD'A'$ 内, 点 O 到平面 $MA'D'$ 的距离 $h =$

$$\frac{1}{2}.$$

$$V_{M-OBC} = V_{M-OA'D'} = V_{O-MA'D'} = \frac{1}{3} S_{\triangle MA'D'} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}.$$

15. 解析: (1) 由已知得 $\sin C + \sin \frac{C}{2} = 1 - \cos C$,

$$\text{即 } \sin \frac{C}{2} (2\cos \frac{C}{2} + 1) = 2\sin^2 \frac{C}{2}$$

$$\text{由 } \sin \frac{C}{2} \neq 0 \text{ 得 } 2\cos \frac{C}{2} + 1 = 2\sin \frac{C}{2}, \text{ 即 } \sin \frac{C}{2} - \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{两边平方得: } \sin C = \frac{3}{4}$$

$$(2) \text{ 由 } \sin \frac{C}{2} - \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{2} > 0 \text{ 得 } \frac{\pi}{4} < \frac{C}{2} < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{即 } \frac{\pi}{2} < C < \pi, \text{ 则由 } \sin C = \frac{3}{4} \text{ 得 } \cos C = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{由 } a^2 + b^2 = 4(a + b) - 8 \text{ 得 } (a - 2)^2 + (b - 2)^2 = 0, \text{ 则 } a = 2, b = 2$$

$$\text{由余弦定理得 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 8 + 2\sqrt{7}, \text{ 所以 } c = \sqrt{7} + 1.$$

$$16. \text{ 解析: (1) 因为 } f(x) = \ln x - ax + \frac{1-a}{x} - 1$$

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{1}{x} - a + \frac{a-1}{x^2} = -\frac{ax^2 - x + (1-a)}{x^2}, x \in (0, +\infty),$$

$$\text{令 } h(x) = ax^2 - x + 1 - a, x \in (0, +\infty),$$

$$\text{①当 } a = 0 \text{ 时, } h(x) = -x + 1, x \in (0, +\infty),$$

所以, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x) > 0$, 此时 $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h(x) < 0$, 此时 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增.

$$\text{②当 } a \neq 0 \text{ 时, 由 } f'(x) = 0$$

$$\text{即 } ax^2 - x + 1 - a = 0, \text{ 解得 } x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{a} - 1.$$

$$1) \text{ 当 } a = \frac{1}{2} \text{ 时, } x_1 = x_2, h(x) \geq 0 \text{ 恒成立,}$$

此时 $f'(x) \leq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

$$2) \text{ 当 } 0 < a < \frac{1}{2} \text{ 时, } \frac{1}{a} - 1 > 1 > 0,$$

$x \in (0, 1)$ 时, $h(x) > 0$, 此时 $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

$x \in (1, \frac{1}{a} - 1)$ 时, $h(x) < 0$, 此时 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

$x \in (\frac{1}{a} - 1, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$, 此时 $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

$$3) \text{ 当 } a < 0 \text{ 时, 由于 } \frac{1}{a} - 1 < 0,$$

$x \in (0, 1)$ 时, $h(x) > 0$, 此时 $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

$x \in (1, +\infty)$ 时, $h(x) < 0$, 此时 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增.

综上所述:

当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 函数 $f(x)$ 在 $(1, \frac{1}{a} - 1)$ 上单调递增, 函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a} - 1, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 因为 $a = \frac{1}{2} \in (0, \frac{1}{2})$, 由(1)知, $x_1 = 1, x_2 = 3 \notin (0, 2)$,

当 $x \in (0, 1)$, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, 2)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上的最小值为 $f(1) = -\frac{1}{2}$

由于“对任意 $x_1 \in (0, 2)$, 存在 $x_2 \in [1, 2]$, 使 $f(x_1) \geq g(x_2)$ ”等价于

“ $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最小值不大于 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上的最小值 $-\frac{1}{2}$ ” (*)

又 $g(x) = (x - b)^2 + 4 - b^2, x \in [1, 2]$ 所以

① 当 $b < 1$ 时, 因为 $[g(x)]_{\min} = g(1) = 5 - 2b > 0$, 此时与(*)矛盾;

② 当 $b \in [1, 2]$ 时, 因为 $[g(x)]_{\min} = 4 - b^2 \geq 0$, 同样与(*)矛盾;

③ 当 $b \in (2, +\infty)$ 时, 因为 $[g(x)]_{\min} = g(2) = 8 - 4b$

解不等式 $8 - 4b \leq -\frac{1}{2}$, 可得 $b \geq \frac{17}{8}$.

综上, b 的取值范围是 $[\frac{17}{8}, +\infty)$.

17. 解析: (1) 考虑到结构要证 $a^2 + c^2 = 2b^2$, 类似勾股数进行拼凑.

证明: 考虑到结构特征, 取特值 $1^2, 5^2, 7^2$ 满足等差数列, 只需取 $b = 5a, c = 7a$, 对一切正整数 a

均能成立.

(2)结合第一问的特征,将等差数列分解,通过一个可做多种结构分解的因式说明构成三角形,再证明互不相似,且无穷.

证明:若 a_n^2, b_n^2, c_n^2 成等差数列,则 $b_n^2 - a_n^2 = c_n^2 - b_n^2$,

分解得: $(b_n + a_n)(b_n - a_n) = (c_n + b_n)(c_n - b_n)$

选取关于 n 的一个多项式,例如 $4n(n^2 - 1)$ 做两种途径的分解: $4n(n^2 - 1) = (2n - 2)(2n^2 + 2n) = (2n^2 - 2n)(2n + 2)$

对比目标式,构造
$$\begin{cases} a_n = n^2 - 2n - 1 \\ b_n = n^2 + 1 \\ c_n = n^2 + 2n - 1 \end{cases} \quad (n \geq 4),$$
 由第一问结论得,等差数列成立,考察三角形边长关

系,可构成三角形的三边.

下证互不相似.

任取正整数 $m, n (m, n \geq 4, \text{且 } m \neq n)$, 若 $\triangle m, \triangle n$ 相似,则三边对应成比例 $\frac{m^2 - 2m - 1}{n^2 - 2n - 1} =$

$$\frac{m^2 + 1}{n^2 + 1} = \frac{m^2 + 2m - 1}{n^2 + 2n - 1},$$

由比例的性质得: $\frac{m - 1}{n - 1} = \frac{m + 1}{n + 1} \Rightarrow m = n$, 与假设 $m \neq n$ 矛盾,即任两个三角形 $\triangle m$ 与 $\triangle n$

$(m, n \geq 4, m \neq n)$ 互不相似.

18. 解析:(1)点 $P(x_0, y_0) (x_0 \neq \pm a)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上,

$$\text{有 } \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$$\text{由题意又有 } \frac{y_0}{x_0 - a} \cdot \frac{y_0}{x_0 + a} = \frac{1}{5},$$

$$\text{可得 } a^2 = 5b^2, c^2 = a^2 + b^2 = 6b^2, \text{ 则 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

$$(2) \text{ 联立 } \begin{cases} x^2 - 5y^2 = 5b^2 \\ y = x - c \end{cases}, \text{ 得 } 4x^2 - 10cx + 35b^2 = 0, \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$$

$$\text{则 } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{5c}{2}, \\ x_1 x_2 = \frac{35b^2}{4} \end{cases} \quad \text{①}$$

$$\text{设 } \overrightarrow{OC} = (x_3, y_3), \overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \text{ 即 } \begin{cases} x_3 = \lambda x_1 + x_2 \\ y_3 = \lambda y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$\text{又 } C \text{ 为双曲线上一点, 即 } x_3^2 - 5y_3^2 = 5b^2,$$

$$\text{有 } (\lambda x_1 + x_2)^2 - 5(\lambda y_1 + y_2)^2 = 5b^2$$

$$\text{化简得: } \lambda^2(x_1^2 - 5y_1^2) + (x_2^2 - 5y_2^2) + 2\lambda(x_1x_2 - 5y_1y_2) = 5b^2 \quad \text{②}$$

$$\text{又 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \text{ 在双曲线上, 所以 } x_1^2 - 5y_1^2 = 5b^2, x_2^2 - 5y_2^2 = 5b^2$$

由①式又有

$$x_1x_2 - 5y_1y_2 = x_1x_2 - 5(x_1 - c)(x_2 - c) = -4x_1x_2 + 5c(x_1 + x_2) - 5c^2 = 10b^2$$

$$\text{得: } \lambda^2 + 4\lambda = 0, \text{ 解出 } \lambda = 0, \text{ 或 } \lambda = -4.$$