

《2011年全国中学生数学能力竞赛(决赛)试题 初三年级组》参考答案

一、画龙点睛(本大题共8道小题,每小题3分,总计24分)

1. $a > 0$ 或 $a < -1$ 2. -21 3. -5 4. 10 5. 5 6. 4 或 6 7. 45 8. $\frac{1}{4^{n-1}}$

二、一锤定音(本大题共4道小题,每小题3分,总计12分)

9. B 10. B 11. C 12. C

三、妙笔生花(本大题共4道小题,13题6分,14题7分,15题8分,16题9分,总计30分)

13. (1)设舟山与嘉兴两地间的高速公路路程为 s 千米,由题意得 $\frac{s}{4} - \frac{s}{4.5} = 10$ 2分

解得 $s = 360$.答:舟山与嘉兴两地间的高速公路路程为360千米. 3分

(2)将 $x = 360 - 48 - 36 = 276, b = 100 + 80 = 180, y = 295.4$,代入 $y = ax + b + 5$,得 $295.4 = 276a + 180 + 5$, 5分

解得 $a = 0.4$,答:轿车的高速公路里程费是0.4元/千米. 6分

14. (1)列举所有可能出现搭档的结果如下:

男1号与女1号,男1号与男2号,男1号与女2号,男1号与男3号,男1号与女3号,
女1号与男2号,女1号与女2号,女1号与男3号,女1号与女3号,男2号与女2号,
男2号与男3号,男2号与女3号,女2号与男3号,女2号与女3号,男3号与女3号;

..... 3分

(2)由(1)知列举出的结果共有15种,这15种结果是“等可能”的,其中同一年级男、女选手组成搭档的有“男1号与女1号”、“男2号与女2号”、“男3号与女3号”三种结果,所以同一年级男、女选手组成搭档的概率为 $\frac{3}{15} = 0.2$; 5分

(3)由(1)知列举出的结果共有15种,这15种结果是“等可能”的,高年级男选手与低年级女选手组成搭档的有“女1号与男2号”、“女1号与男3号”、“女2号与男3号”三种结果,所以高年级男选手与低年级女选手组成搭档的概率为 $\frac{3}{15} = 0.2$ 7分

15. (1) $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$; 3分

(2)原式 = $2^5 + 5 \times 2^4 \times (-1) + 10 \times 2^3 \times (-1)^2 + 10 \times 2^2 \times (-1)^3 + 5 \times 2 \times (-1)^4 + (-1)^5 = (2 - 1)^5 = 1$ 8分

16. 设亮出4,9,7,11,10,8的人心中想的数分别为 a, b, c, d, e, f 1分

则由题意得 $a + c = 18, b + d = 14, c + e = 22, d + f = 20, e + a = 16, f + b = 8$,各式左右两边分别相加,整理可得 $a + b + c + d + e + f = 49$ 3分

又得 $a + b + c + d + e + c = 54$,则 $c - f = 5$ 4分

又 $\because a + b + c + d = 32, \therefore e + f = 17$ 5分

同理易得 $a + b = 7, c + d = 25$ 6分

又 $\because a + c + b + f = 26, \therefore c + f = 19, \therefore c = 12$,则 $d = 13$ 8分

\therefore 亮出11的人心中想的数是13. 9分

四、一鼓作气(本大题共2道小题,17题12分,18题12分,总计24分)

17. 第一次付款198元,可能是所购物品的实价,未享受优惠;也可能是按九折优惠后所付的款.故应分两种情况加以讨论. 2分

情况1:当198元为购物不打折付的钱时,所购物品的原价为198元. 3分

又 $554 = 450 + 104$,其中450元为购物500元打九折付的钱,104元为购物打八折付的钱, $104 \div 0.8 = 130$ (元).因此554元所购物品的原价为 $130 + 500 = 630$ (元). 5分

于是小明所购全部物品共花 $198 + 630 = 828$ (元),因此小明的妹妹一次性购买,应付 $500 \times$

$0.9 + (828 - 500) \times 0.8 = 712.4$ (元). 7分
 情况 2: 当 198 元为购物打九折付的钱时, 所购物品的原价为 $198 \div 0.9 = 220$ (元). ... 9分
 仿情况 1 的讨论, 购 $220 + 630 = 850$ (元)的物品一次性付款应为 $500 \times 0.9 + (850 - 500) \times 0.8 = 730$ (元). 11分
 综上所述, 小明的妹妹一次去超市购买小明已购的同样多的物品, 应付款 712.4 元或 730 元.

..... 12分

18. 将 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}$ 化成以 12 为分母的分数, 它们分别为 $\frac{6}{12}, \frac{4}{12}, \frac{3}{12}, \frac{2}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}$, 整理可得 $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \frac{6}{12}, \frac{7}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}$.
 3分

先忽略分母, 将 1~9 填入方格中可得

6	1	8
7	5	3
2	9	4

..... 9分

因此, 将 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}$ 填入方格中, 为

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$

..... 12分

五、再接再厉(本大题总计 15 分)

19. 尼基塔和帕维尔的计算方法都不正确. 2分

理由: 11 个馒头分成 3 份, 意味着每个人吃 $\frac{11}{3}$ 个. 4分

帕维尔带 7 个馒头来, 自己吃了 $\frac{11}{3}$ 个, 所以他分给猎人 $7 - \frac{11}{3} = \frac{10}{3}$ (个). 9分

至于尼基塔, 他带了 4 个馒头, 自己吃掉 $\frac{11}{3}$, 把剩余的 $\frac{1}{3}$ 给猎人. 猎人总共吃了 $\frac{11}{3}$ 个馒头, 同

时他也付了 11 戈比, 这意味着: 他每吃 $\frac{1}{3}$ 个馒头, 就付出 1 戈比. 其 $\frac{10}{3}$ 个馒头是从帕维尔那里

得来的, 只有 $\frac{1}{3}$ 个馒头才是尼基塔给他的. 14分

因此, 帕维尔应得 10 戈比, 尼基塔应得 1 戈比. 15分

六、马到成功(本大题总计 15 分)

20. 显然 x_1, x_2, x_3, x_4 都在 0~25 之间. 1分

$\because 3x_2$ 除以 26 余 16, $\therefore 3x_2 = 16$ 或 42 或 68. 3分

又 $\because 3x_2$ 是 3 的倍数, $\therefore 3x_2 = 42$, 即 $x_2 = 14$ 4分

$\because x_1 + 2x_2 = x_1 + 28$ 除以 26 余 9, $\therefore x_1 + 28 = 26 + 9$, $\therefore x_1 = 7$ 6分

$\because 3x_4$ 除以 26 余 12, $\therefore 3x_4 = 12$ 或 38 或 64, 8分

$\because 3x_4$ 是 3 的倍数, $\therefore 3x_4 = 12$, 即 $x_4 = 4$ 9分

又 $\because x_3 + 2x_4 = x_3 + 8$ 除以 26 余 23, $\therefore x_3 + 8 = 23$, $\therefore x_3 = 15$ 11分

$\therefore x_1 = 7, x_2 = 14, x_3 = 15, x_4 = 4$. 它们分别对应的英语字母是 7-h, 14-o, 15-p, 4-e. ... 13分

\therefore 这个密码单词为 hope, 意思是“希望”. 15分