《2011 年全国中学生数学能力竞赛(决赛)试题高一年级组》参考答案

基础能力部分(共 60 分,每题 5 分)

一、运算求解能力

1. $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

2. 0

3. $[-\frac{3}{2},\frac{8}{3}]$

二、数据处理能力

4. ①②③

三、空间想象能力

5. 10 与 16

四、抽象概括能力

6. n

五、推理论证能力

7. 6

六、实践能力

8. P

9. 14

10. 12

七、创新意识

11. 41

12. $\frac{5}{3}$

综合能力部分(共 90 分)

13. 解:(1)由$(\frac{1}{2})^x-1>0$,解得 $x<0$,

$\therefore f(x)$的定义域为$(-\infty,0)$; …………………………………………………………… (4 分)

(2)设 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$且 $x_1<x_2$,则 $0<(\frac{1}{2})^{x_2}-1<(\frac{1}{2})^{x_1}-1$,

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}[(\frac{1}{2})^{x_2}-1]>\log_{\frac{1}{2}}[(\frac{1}{2})^{x_1}-1]$, …………………………………………………… (8 分)

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数. ………………………………………………………………………………… （10 分）

14. 解：$\because f(19)=f(1\times19)=f(1)f(19)$，$f(19)\neq0$，

$\therefore f(1)=1$. ……………………………………………………………………………………………… （2 分）

$\because f(n)$ 是严格单调递增的，

$\therefore f(1)<f(2)<\cdots<f(19)$.

$\because f(1)=1$，$f(19)=19$，$f(n)\in\mathbf{Z}$，

$\therefore f(n)=n\ (1\leqslant n\leqslant19,n\in\mathbf{N})$. ………………………………………………………… （4 分）

$\because f(95)=f(5\times19)=f(5)f(19)=5\times19=95$，$f(99)=f(9\times11)=f(9)f(11)=9\times11=99$，

$\therefore f(96)=96$，$f(97)=97$，$f(98)=98$，

$\therefore f(f(19)f(98))=f(19)f(98)=19\times98=1862$. ………………………………………………… （10 分）

15. 解：假设说实话的是甲，则丙说的“不是我打碎的”和丁说的“乙在说谎”也是实话，与题中已知的条件“只有一人说了实话”矛盾，所以甲说的不是实话；……………………… （3 分）

假设说实话的是乙，则丙说的“不是我打碎的”也是实话，与题中已知的条件“只有一人说了实话”矛盾，所以乙说的不是实话；……………………………………………………………… （6 分）

假设说实话的是丙，则乙说的“是丁打碎的”和丁说的“乙在说谎”必有一个人说的是实话，与题中已知的条件“只有一人说了实话”矛盾，所以丙说的不是实话；……………………… （9 分）

假设说实话的是丁，则甲、乙、丙说的都是假话题，符合已知的条件“只有一人说了实话”，所以说实话的是丁. …………………………………………………………………………………… （15 分）

16. 解：(1)设 $x=1,y=2$，$f(3)=0$； ………………………………………………………………… （2 分）

设 $x=0,y=0$，$f(0)=1$； ……………………………………………………………………………… （4 分）

设 $x=1,y=1$，$f(2)=f[1f(1)]\cdot f(1)=0$.

$\because f(1)\neq0$，$\therefore f[f(1)]=0$.

由条件，知 $f(1)\geqslant2$. ………………………………………………………………………………… （5 分）

若 $f(1)>2$，则 $0<\dfrac{2}{f(1)}<1$，即 $1<\dfrac{2}{f(1)}+1<2$.

$f[\dfrac{2}{f(1)}+1]=f[\dfrac{2}{f(1)}f(1)]\cdot f(1)=0$，这与已知矛盾.

$\therefore f(1)=2$； …………………………………………………………………………………………… （7 分）

(2)当 $x\geqslant2$ 时，设 $x=2+\alpha(\alpha\geqslant0)$，

则 $f(x)=f(\alpha+2)=f[\alpha f(2)]\cdot f(2)=0$； …………………………………………………… （9 分）

当 $0<x<2$ 时，则 $0<2-x<2$，$f(2)=f[(2-x)+x]=f[(2-x)f(x)]\cdot f(x)=0$.

又 $f(x)\neq0$，$\therefore f[(2-x)f(x)]=0$，

$\therefore (2-x)\cdot f(x)\geqslant2$，$\therefore f(x)\geqslant\dfrac{2}{2-x}$.

若$f(x) > \dfrac{2}{2-x}$,则$0 < \dfrac{2}{f(x)} < 2-x$,$\therefore 0 < \dfrac{2}{f(x)} + x < 2$,

$\therefore f[\dfrac{2}{f(x)} + x] \neq 0$.

而实际上$f[\dfrac{2}{f(x)} + x] = f[\dfrac{2}{f(x)} \cdot f(x)] \cdot f(x) = f(2)f(x) = 0$矛盾,

$\therefore f(x) = \dfrac{2}{2-x}$,

$\therefore f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-x}, 0 \leqslant x < 2 \\ 0, x \geqslant 2 \end{cases}$. ………………………………………………………… (15 分)

17. 解:(1)$\because$方程$ax^2 + (b-1)x = 0(a \neq 0)$有等根,

$\therefore \Delta = (b-1)^2 - 4a \times 0 = 0$. ………………………………………………………… (2 分)

又$f(2) = 0$,$\therefore 4a + 2b = 0$.

$\therefore a = -\dfrac{1}{2}$. ………………………………………………………………………… (4 分)

$\therefore f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + x$; …………………………………………………………………… (6 分)

(2)$\because f(x) = -\dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}$,

$\therefore 2n \leqslant \dfrac{1}{2}$,即$n \leqslant \dfrac{1}{4}$. ………………………………………………………………… (8 分)

又二次函数$y = -\dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{2}$的对称轴方程为$x = 1$,

$\therefore$当$n \leqslant \dfrac{1}{4}$时,$f(x)$在$[m,n]$上为增函数,

设m、n存在,则$\begin{cases} f(m) = 2m \\ f(n) = 2n \end{cases}$,即$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}m^2 - m = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ 或 } m = -2 \\ -\dfrac{1}{2}n^2 - n = 0 \Rightarrow n = 0 \text{ 或 } n = -2 \end{cases}$. …………… (14 分)

$\because m < n \leqslant \dfrac{1}{4}$,$\therefore \begin{cases} m = -2 \\ n = 0 \end{cases}$. ………………………………………………………… (18 分)

即存在实数$m = -2$,$n = 0$使$f(x)$的定义域为$[-2,0]$,值域为$[-4,0]$. ……………… (20 分)

18. 解:(1)$f(x) = (x + \dfrac{b}{2})^2 - 3 - \dfrac{b^2}{4}$,抛物线开口向上,其对称轴方程为$x = -\dfrac{b}{2}$,下面就对称轴与区间$[b-2, b+2]$端点的相对位置分段讨论:………………………………………… (1 分)

①当$0 \leqslant b \leqslant \dfrac{4}{3}$时,$b - 2 \leqslant -\dfrac{b}{2} \leqslant b + 2$且$(b+2) - (-\dfrac{b}{2}) \geqslant -\dfrac{b}{2} - (b-2)$,

此时 $M(b)=f(b+2)=2b^2+6b+1$，$m(b)=-3-\dfrac{b^2}{4}$.

$g(b)=\dfrac{9}{4}b^2+6b+4$. …………………………………………………………………… (3 分)

②当 $-\dfrac{4}{3}\leqslant b<0$ 时，$b-2\leqslant -\dfrac{b}{2}\leqslant b+2$ 且 $(b+2)-(-\dfrac{b}{2})\leqslant -\dfrac{b}{2}-(b-2)$，

此时 $M(b)=f(b-2)=2b^2-6b+1$，$m(b)=-3-\dfrac{b^2}{4}$.

$g(b)=\dfrac{9}{4}b^2-6b+4$. …………………………………………………………………… (5 分)

③当 $b>\dfrac{4}{3}$ 时，$-\dfrac{b}{2}<b-2$，$f(x)$在区间$[b-2,b+2]$上递增，

此时 $M(b)=f(b+2)=2b^2+6b+1$，$m(b)=f(b-2)=2b^2-6b+1$.

$g(b)=12b$. ………………………………………………………………………………… (7 分)

④当 $b<-\dfrac{4}{3}$ 时，$-\dfrac{b}{2}>b+2$，$f(x)$在区间$[b-2,b+2]$上递减，

此时 $M(b)=f(b-2)=2b^2-6b+1$，$m(b)=f(b+2)=2b^2+6b+1$.

$g(b)=-12b$. ……………………………………………………………………………… (9 分)

综上所得 $g(b)=\begin{cases}-12b, & b<-\dfrac{4}{3}\\ \dfrac{9}{4}b^2-6b+4, & -\dfrac{4}{3}\leqslant b<0\\ \dfrac{9}{4}b^2+6b+4, & 0\leqslant b\leqslant \dfrac{4}{3}\\ 12b, & b>\dfrac{4}{3}\end{cases}$，…………………………………………………… (11 分)

(2)当 $b<-\dfrac{4}{3}$ 时，$g(b)=-12b>g(-\dfrac{4}{3})=16$；……………………………………… (12 分)

当 $-\dfrac{4}{3}\leqslant b<0$ 时，$g(b)=\dfrac{9}{4}b^2-6b+4$ 递减，$g(b)>g(0)=4$；…………………… (14 分)

当 $0\leqslant b\leqslant\dfrac{4}{3}$ 时，$g(b)=\dfrac{9}{4}b^2+6b+4$ 递增，$g(b)\geqslant g(0)=4$；………………… (16 分)

当 $b>\dfrac{4}{3}$ 时，$g(b)=12b>g(\dfrac{4}{3})=16$. ……………………………………………… (18 分)

综上所述，当 $b=0$ 时，$[g(b)]_{\min}=4$. ……………………………………………………… (20 分)