《2011 年全国中学生数学能力竞赛(决赛)试题高二年级组》参考答案

基础能力部分(共 60 分,每题 5 分)

一、运算求解能力

1. $x+3y-15=0$

2. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

3. n^2

二、数据处理能力

4. 22

5. 1

三、空间想象能力

6. $\frac{\sqrt{6}\pi}{8}$

四、抽象概括能力

7. D

8. A

五、推理论证能力

9. C

10. B

六、实践能力

11. 45000 元

七、创新意识

12. (3)

综合能力部分(90 分)

13. 解:若$\begin{cases} a+b=ac \\ a+2b=ac^2 \end{cases} \Rightarrow a+ac^2-2ac=0$,

所以 $a(c-1)^2=0$,即 $a=0$ 或 $c=1$.

当 $a=0$ 时,集合 B 中的元素均为 0,故舍去;

当 $c=1$ 时,集合 B 中的元素均相同,故舍去.

若$\begin{cases} a+b=ac^2 \\ a+2b=ac \end{cases} \Rightarrow 2ac^2-ac-a=0.$

因为 $a\neq 0$,所以 $2c^2-c-1=0$,

即$(c-1)(2c+1)=0$.

又 $c\neq 1$,所以只有 $c=-\dfrac{1}{2}$.

经检验,此时 $A=B$ 成立.综上所述 $c=-\dfrac{1}{2}$.

14. 解:因为 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$,$b=(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,

则$|\boldsymbol{m}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{5+t^2+2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{t^2+3\sqrt{2}t+5}=\sqrt{(t+\dfrac{3\sqrt{2}}{2})^2+\dfrac{1}{2}}$

所以当 $t=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$时,$|\boldsymbol{m}|$取到最小值,最小值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)由条件得 $\cos45°=\dfrac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|}$,又因为$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{6}$, $|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{5+t^2}$,$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})=5-t$,

则有$\dfrac{5-\mathrm{t}}{\sqrt{6}\sqrt{5+t^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,且 $t<5$,

整理得 $t^2+5t-5=0$,所以存在 $t=\dfrac{-5\pm3\sqrt{5}}{2}$满足条件.

15. 解:(1) 由$f(-1)=-2$,知,$\lg b-\lg a+1=0$, …① $\therefore \dfrac{a}{b}=10$ …②又 $f(x)\geqslant 2x$ 恒成立,

有 $x^2+x\cdot\lg a+\lg b\geqslant 0$ 恒成立,故 $\Delta=(\lg a)^2-4\lg b\leqslant 0$.

将①式代入上式得:$(\lg a)^2-2\lg b+1\leqslant 0$,即$(\lg b-1)^2\leqslant 0$,故 $\lg b=1$.

即 $b=10$, 代入② 得,$a=100$.

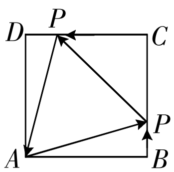
(2)$f(x)=x^2+4x+1$,$f(x)<x+5$,即 $x^2+4x+1<x+5$, $\therefore x^2+3x-4<0$

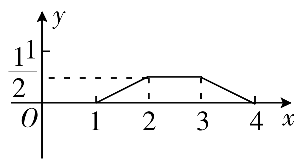
解得: $-4<x<1$, $\therefore$不等式的解集为$\{x\mid -4<x<1\}$.

16. 解:(1)如原题图,当 P 在 AB 上运动时,$PA=x$;当 P 点在 BC 上运动时,由 $\mathrm{Rt}\triangle ABP$ 可得 $PA=\sqrt{1+(x-1)^2}$;当 P 点在 CD 上运动时,由 $\mathrm{Rt}\triangle ADP$ 易得 $PA=\sqrt{1+(3-x)^2}$;当 P 点在 DA 上运动时,$PA=4-x$,故 $f(x)$的表达式为:

$$f(x)=\begin{cases}x(0\leqslant x\leqslant 1)\\ \sqrt{x^2-2x+2}\,(1<x\leqslant 2)\\ \sqrt{x^2-6x+10}\,(2<x\leqslant 3)\\ 4-x(3<x\leqslant 4)\end{cases}$$

(2)由于 P 点在折线 $ABCD$ 上不同位置时，$\triangle ABP$ 的形状各有特征，计算它们的面积也有不同的方法，因此同样必须对 P 点的位置进行分类求解.





如原题图，当 P 在线段 AB 上时，$\triangle ABP$ 的面积 $S=0$；当 P 在 BC 上时，即 $1<x\leqslant 2$ 时，$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}AB\cdot BP=\frac{1}{2}(x-1)$；当 P 在 CD 上时，即 $2<x\leqslant 3$ 时，$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$；当 P 在 DA 上时，即 $3<x\leqslant 4$ 时，$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}(4-x)$.

$$故\ g(x)=\begin{cases}0(0\leqslant x\leqslant 1)\\ \frac{1}{2}(x-1)\,(1<x\leqslant 2)\\ \frac{1}{2}\quad(2<x\leqslant 3)\\ \frac{1}{2}(4-x)(3<x\leqslant 4)\end{cases}$$

17. 解：(1)设第一年的森林的木材存量为 a_1，第 n 年后的森林的木材存量为 a_n，则

$a_1=a(1+\frac{1}{4})-b=\frac{5}{4}a-b$，$a_2=\frac{5}{4}a_1-b=(\frac{5}{4})^2a-(\frac{5}{4}+1)b$，

$a_3=\frac{5}{4}a_2-b=(\frac{5}{4})^3a-[(\frac{5}{4})^2+\frac{5}{4}+1]b$，

………

$a_n=(\frac{5}{4})^na-[(\frac{5}{4})^{n-1}+(\frac{5}{4})^{n-2}+\cdots+1]b=(\frac{5}{4})^na-4[(\frac{5}{4})^n-1]b(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)当 $b=\frac{19}{72}a$ 时，有 $a_n<\frac{7}{9}a$，得 $(\frac{5}{4})^na-4[(\frac{5}{4})^n-1]\times\frac{19}{72}a<\frac{7}{9}a$ 即 $(\frac{5}{4})^n>5$，

所以，$n>\frac{\lg 5}{\lg 5-2\lg 2}=\frac{1-\lg 2}{1-3\lg 2}\approx 7.2$.即需要 7~8 年.

18. 解：(1)由于 $\cos^2\frac{n\pi}{3}-\sin^2\frac{n\pi}{3}=\cos\frac{2n\pi}{3}$，故

$S_{3k}=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+\cdots+(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k})$

$=(-\frac{1^2+2^2}{2}+3^2)+(-\frac{4^2+5^2}{2}+6^2)+\cdots+(-\frac{(3k-2)^2+(3k-1)^2}{2}+(3k)^2)$,

$=\frac{13}{2}+\frac{31}{2}+\cdots+\frac{18k-5}{2}=\frac{k(9k+4)}{2}$

$S_{3k-1}=S_{3k}-a_{3k}=\frac{k(4-9k)}{2}$,

$S_{3k-2}=S_{3k-1}-a_{3k-1}=\frac{k(4-9k)}{2}+\frac{(3k-1)^2}{2}=\frac{1}{2}-k=-\frac{3k-2}{3}-\frac{1}{6}$,

故 $S_n=\begin{cases}-\frac{n}{3}-\frac{1}{6}, n=3k-2\\ \frac{(n+1)(1-3n)}{6}, n=3k-1 \quad (k\in\mathbf{N}^*)\\ \frac{n(3n+4)}{6}, n=3k\end{cases}$

(2)$b_n=\frac{S_{3n}}{n\cdot 4^n}=\frac{9n+4}{2\cdot 4^n}$，$T_n=\frac{1}{2}[\frac{13}{4}+\frac{22}{4^2}+\cdots+\frac{9n+4}{4^n}]$,

$4T_n=\frac{1}{2}[13+\frac{22}{4}+\cdots+\frac{9n+4}{4^{n-1}}]$

两式相减得 $3T_n=\frac{1}{2}[13+\frac{9}{4}+\cdots+\frac{9}{4^{n-1}}-\frac{9n+4}{4^n}]=\frac{1}{2}[13+\frac{\frac{9}{4}-\frac{9}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{9n+4}{4^n}]=8$

$-\frac{1}{2^{2n-3}}-\frac{9n}{2^{2n+1}}$，故 $T_n=\frac{8}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^{2n-3}}-\frac{3n}{2^{2n+1}}$.