

《2012 年全国中学生数学能力竞赛(初赛)试题 初三年级组》参考答案

一、画龙点睛(本大题共 8 道小题,每小题 3 分,总计 24 分)

1. $\frac{1}{4}$ 2. 123 3. 4 4. 0 或 3 5. 36 6. $\frac{2012}{2013}$ 7. $9n^2 - 1$ 8. 26

二、一锤定音(本大题共 4 道小题,每小题 3 分,总计 12 分)

9. A 10. A 11. D 12. C

三、妙笔生花(本大题共 4 道小题,13 题 6 分,14 题 7 分,15 题 8 分,16 题 9 分,总计 30 分)

13. 设各堆牌的张数相同为 a 1 分

第二步后:左、中、右三堆牌数依次是 $a - 2, a + 2, a$; 2 分

第三步后:左、中、右三堆牌数依次是 $a - 2, a + 3, a - 1$; 3 分

第四步后:左、中、右三堆牌数依次是 $2(a - 2), a + 3 - (a - 2), a - 1$; 4 分

所以中间一堆牌的张数是 $a + 3 - (a - 2) = a + 3 - a + 2 = 5$ 6 分

14. 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D (图略). 1 分

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\therefore AB = \frac{140\sqrt{6}}{3}, \angle B = 60^\circ,$

$\therefore AD = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{140\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 70\sqrt{2}$ 3 分

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $\therefore AD = 70\sqrt{2}, \angle C = 45^\circ, \therefore AC = \frac{AD}{\sin 45^\circ} = 140$ 5 分

$\therefore$ “中国渔政 310”船赶往出事地点所需时间为 $\frac{140}{20} = 7$ (小时). 7 分

15. (1)图②: $(-60) \div (-12) = 5$ 1 分

图③: $(-2) \times (-5) \times 17 = 170$; 2 分

$(-2) + (-5) + 17 = 10$; 3 分

$170 \div 10 = 17$; 4 分

(2)图④: $5 \times (-8) \times (-9) = 360$;

$5 + (-8) + (-9) = -12$;

$y = 360 \div (-12) = -30$; 6 分

图⑤: $\frac{1 \times x \times 3}{1 + x + 3} = -3$, 解得 $x = -2$ 8 分

16. 方程组中的三个方程相加, 得 $(a + b + c) + (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) = 72$ 2 分

$\therefore (a + b + c)^2 + (a + b + c) - 72 = 0$, 即 $[(a + b + c) + 9][(a + b + c) - 8] = 0$ 6 分

$\therefore a, b, c$ 都是正实数, $\therefore a + b + c + 9 > 0, \therefore a + b + c = 8$ 9 分

四、一鼓作气(本大题共 2 道小题,17 题 12 分,18 题 12 分,总计 24 分)

17. 先设未知数再列出下表:

	甲	乙	丙
原有	x	y	z
第一次送后	$x - y - z$	$2y$	$2z$
第二次送后	$2(x - y - z)$	$2y - (x - y - z) - 2z$	$4z$
第三次送后	$4(x - y - z)$	$2[2y - (x - y - z) - 2z]$	$4z - 2(x - y - z) - [2y - (x - y - z) - 2z]$

..... 7 分

所以 $4(x - y - z) = 64, 2[2y - (x - y - z) - 2z] = 64, 4z - 2(x - y - z) - [2y - (x - y - z) - 2z] = 64,$
 9 分
 解得 $x = 104, y = 56, z = 32$. 所以甲原来有邮票 104 枚, 乙原来有邮票 56 枚, 丙原来有邮票 32 枚. ... 12 分
 18. 假设王女士、张女士、杨女士的体重分别为 $(x - 10)$ 斤、 x 斤、 $(x + 10)$ 斤, 则 $(x - 10) + x + (x + 10) = 396$, 解得 $x = 132$, 所以王女士、张女士、杨女士的体重分别为 122 斤、132 斤、142 斤. 2 分
 设余先生和周先生的妻子的体重分别为 y 斤和 z 斤. 若吴先生的体重为 122 斤, 则有 $1.5y + 2z = 1000 - 396 - 122$, 有解 $\begin{cases} y = 132, \\ z = 142. \end{cases}$ 5 分
 若吴先生的体重为 132 斤, 则有 $1.5y + 2z = 1000 - 396 - 132$, 此时 $\begin{cases} y = 122, \\ z = 142 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} y = 142, \\ z = 122 \end{cases}$ 都不是方程的解.
 8 分
 若吴先生的体重为 142 斤, 则有 $1.5y + 2z = 1000 - 396 - 142$, 此时 $\begin{cases} y = 122, \\ z = 132 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} y = 132, \\ z = 122 \end{cases}$ 都不是方程的解.
 11 分
 所以吴先生的妻子是王女士, 余先生的妻子是张女士, 周先生的妻子是杨女士. 12 分

五、再接再厉 (本大题总计 15 分)

19. $\because \angle CAB = 90^\circ, \therefore PQ$ 是直径. 设 PQ 的中点为 O , 则 O 是过点 A 的圆的圆心. 连接 OE, PE , 作 $PF \perp AB$ 交 BC 于点 F (图略). 2 分
 $\because AB = AC, \therefore \angle B = 45^\circ. \because PF \perp AB, \therefore PF = PB, PF \parallel CQ, \therefore BP + CQ = PQ, \therefore FP + CQ = PQ = 2OE, \therefore OE = \frac{1}{2}(FP + CQ).$ 6 分

若取梯形 $CQPF$ 的边 CF 的中点 M , 连接 OM , 则 $OM \parallel CQ \parallel PF, OM = \frac{1}{2}(FP + CQ), \therefore OE = OM, \therefore$ 点 M 即为 FC 与 $\odot O$ 的交点 $E. \therefore OE \parallel CQ.$ 10 分

又 $\because CQ \perp AB, \therefore OE \perp AB, \therefore EA = EP, \therefore \angle EAP = \angle EPA. \because \angle EAP = \angle EAD + \angle DAB, \angle EPA = \angle B + \angle PEB, \therefore \angle EAD + \angle DAB = \angle B + \angle PEB.$ 又 $\because \angle DAB = \angle PEB, \therefore \angle EAD = \angle B = 45^\circ.$ 15 分

六、马到成功 (本大题总计 15 分)

20. (1) 设 $m^2 + m + 4 = k^2 (k \text{ 为非负整数})$, 则有 $m^2 + m + 4 - k^2 = 0.$ 2 分
 由 m 为整数, 知其 Δ 为完全平方数, 所以 $1 - 4(4 - k^2) = p^2 (p \text{ 为非负整数})$, 即 $(2k + p)(2k - p) = 15$, 显然 $2k + p > 2k - p$, 所以 $\begin{cases} 2k + p = 15, \\ 2k - p = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2k + p = 5, \\ 2k - p = 3, \end{cases}$ 解得 $p = 7$ 或 $p = 1.$ 7 分

所以 $m = \frac{-1 \pm p}{2}$, 解得 $m_1 = 3, m_2 = -4, m_3 = 0, m_4 = -1$, 所以 $a = 3, b = -4, c = -1;$ 10 分

(2) 不能. 11 分

证明: 因为 $(\frac{a+b}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{a-b}{\sqrt{2}})^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$, 即操作前后, 这三个数的平方和不变. 13 分

而 $3^2 + (-4)^2 + (-1)^2 \neq 2004^2 + 2005^2 + 2006^2$, 所以对 a, b, c 进行若干次操作后, 不能得到 2004、2005、2006 这三个数. 15 分