《2012年全国中学生数学能力竞赛(初赛)试题高一年级组》参考答案

基础能力部分(共60分,每题5分)

一、运算求解能力

1. 2　**2.** 6164　**3.** −4

二、数据处理能力

4. 16

三、空间想象能力

5. $\sqrt{74}$

四、抽象概括能力

6. 34

五、推理论证能力

7. 14

六、实践能力

8. 1600000

9. B

10. $\frac{p}{r}$

七、创新意识

11. 0

12. C

综合能力部分(共90分)

13. 解:$\because f(t)=\log_2 t, t\in[\sqrt{2},8]$,$\therefore m\in[\frac{1}{2},3]$. ……………………(2分)

$x^2+mx+4>2m+4x \Leftrightarrow (x-2)m+x^2-4x+4>0$.

令 $g(m)=(x-2)m+x^2-4x+4$,

由题意,知当 $m\in[\frac{1}{2},3]$时,恒有 $g(m)>0$. ……………………(4分)

当 $x=2$ 时,不满足题意; ……………………(6分)

当 $x\neq 2$ 时,有$\begin{cases} g(\frac{1}{2})>0 \\ g(3)>0 \end{cases}$,解得 $x<-1$ 或 $x>2$.

$\therefore x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$. ……………………(10分)

14. 甲乙两人都是盗窃犯. ……………………(5分)

推理：
经调查研究，已证实第四个证人说了实话.
那么可知第三个人说的“前面两个证词至少有一个是正确的！”是假的.那么可知真实情况是前面两个证词都是假的.
第一个证人说：“我只知道甲未盗窃！”那么甲盗窃；
第二个证人说：“我只知道乙未盗窃！”那么乙盗窃.
所以甲乙两人都是盗窃犯. …………………………………………………………………………（10分）

15. 解：（1）令 $x=y=1$，得 $f(1)=0$；再令 $x=2,y=\frac{1}{2}$，

得 $f(1)=f(2)+f(\frac{1}{2})$.

故 $f(\frac{1}{2})=-1$； ……………………………………………………………………………（5分）

（2）设 $0<x_1<x_2$，则 $f(x_1)+f(\frac{x_2}{x_1})=f(x_2)$，

即 $f(x_2)-f(x_1)=f(\frac{x_2}{x_1})$.

$\because \frac{x_2}{x_1}>1$，故 $f(\frac{x_2}{x_1})>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$，

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数； ………………………………………………………（10分）

（3）由 $f(x^2)>f(8x-6)-1$，得 $f(x^2)>f(8x-6)+f(\frac{1}{2})=f[\frac{1}{2}(8x-6)]$，

故得 $x^2>4x-3$ 且 $8x-6>0$，

解得解集为 $\{x|\frac{3}{4}<x<1$ 或 $x>3\}$. ……………………………………………………（15分）

16. （1）证明：$f(x+y)=f(x)+f(y)(x,y\in\mathbf{R})$ ①，
令 $x=y=0$，代入①式，得 $f(0+0)=f(0)+f(0)$，
即 $f(0)=0$. ……………………………………………………………………………………（2分）
令 $y=-x$，代入①式，得 $f(x-x)=f(x)+f(-x)$.
又 $f(0)=0$，则有 $0=f(x)+f(-x)$.
即 $f(-x)=-f(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立，
$\therefore f(x)$ 是奇函数； ……………………………………………………………………（6分）
（2）解：$f(3)=\log_2 3>0$，
即 $f(3)>f(0)$.
又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调函数，
$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数. ………………………………………………………（8分）
又由（1）$f(x)$ 是奇函数，
则 $f(k\cdot 3^x)<-f(3^x-9^x-2)=f(-3^x+9^x+2)$，
$k\cdot 3^x<-3^x+9^x+2$，

$3^{2x}-(1+k)\cdot 3^{x}+2>0$ 对任意 $x\in \mathbf{R}$ 成立.

令 $t=3^{x}>0$,问题等价于 $t^{2x}-(1+k)t+2>0$ 对任意 $t>0$ 恒成立.

令 $f(t)=t^{2}-(1+k)t+2$,其对称轴 $x=\dfrac{1+k}{2}$. ………………………………………………………… (12 分)

当 $\dfrac{1+k}{2}<0$,即 $k<-1$ 时,$f(0)=2>0$,符合题意;

当 $\dfrac{1+k}{2}\geqslant 0$,对任意 $t>0$,$f(t)>0$ 恒成立 $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1+k}{2}\geqslant 0\\ \Delta=(1+k)^{2}-4\times 2<0\end{cases}$,

解得 $-1\leqslant k<-1+2\sqrt{2}$. ………………………………………………………………………………… (13 分)

综上所述,当 $k<-1+2\sqrt{2}$ 时,$f(k\cdot 3^{x})+f(3^{x}-9^{x}-2)<0$ 对任意 $x\in \mathbf{R}$ 恒成立. ……………… (15 分)

17. 解:由题设,有 $\begin{cases}f(-1)=(-1)^{n}+a-b+c=0\\ f(1)=1+a+b+c=-6\\ f(2)=2^{n}+4a+2b+c=-9\\ f(3)=3^{n}+9a+3b+c=-4\\ f(6)=2^{n}\cdot 3^{n}+36a+6b+c=119\end{cases}$,即 $\begin{cases}a-b+c=-(-1)^{n}\\ a+b+c=-7\\ 4a+2b+c=-9-2^{n}\\ 9a+3b+c=-4-3^{n}\\ 36a+6b+c=119-2^{n}\cdot 3^{n}\end{cases}$ (1),

$\therefore \begin{cases}a=\dfrac{1}{6}[3-(-1)^{n}-2\cdot 2^{n}]\\ b=\dfrac{1}{2}[(-1)^{n}-7]\\ c=-4-\dfrac{1}{3}[(-1)^{n}-2^{n}]\end{cases}$. …………………………………………………………………………………… (6 分)

①当 n 为奇数时,$\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}(2-2^{n})\\ b=-4\\ c=\dfrac{1}{3}(-11+2^{n})\end{cases}$.

将上列各式的值代入(1)中,得 $\begin{cases}3^{n+1}-8\cdot 2^{n}-17=0\\ 2^{n}\cdot 3^{n+1}-35\cdot 2^{n}-368=0\end{cases}$,

消去 3^{n+1},得 $4\cdot(2^{n})^{2}-9\cdot 2^{n}-184=0$.

解得 $n=3$,从而 $a=-2$,$b=-4$,$c=-1$,

故 $f(x)=x^{3}-2x^{2}-4x-1$; ………………………………………………………………………………… (14 分)

②当 n 为偶数时,$a=\dfrac{1-2^{n}}{3}$,$b=-3$,$c=\dfrac{-13+2^{n}}{3}$,

同①,可得方程 $2\cdot(2^{n})^{2}-4\cdot 2^{n}-97=0$.这时无自然数解 n.

综上,得 $f(x)=x^{3}-2x^{2}-4x-1$. ………………………………………………………………………… (20 分)

18. 解:易知 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$,且 $f(x)$ 为偶函数. …………………………………………………… (2 分)

(I)当 $a=1$ 时,$f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x^{2}}{1+x^{2}}}+\sqrt{\dfrac{1+x^{2}}{1-x^{2}}}$.

令 $t=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}=\sqrt{\dfrac{2}{1+x^2}-1}$，

则关于 x 的函数 t 在$(-1,0)$上单调递增，在$(0,1)$上单调递减. …………………………………………… （3 分）

又定义域为$(-1,1)$，$\therefore t\in(0,1]$，而 $y=t+\dfrac{1}{t}$ 在$(0,1]$上单调递减.

由复合函数的单调性，可知 $f(x)$在$(-1,0)$上单调递减，在$(0,1)$上单调递增；…………………………… （6 分）

（II）$t=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$，$\because x\in\left[-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right]$，$\therefore t\in\left[\dfrac{1}{3},1\right]$，$\therefore y=t+\dfrac{a}{t}\left(\dfrac{1}{3}\leqslant t\leqslant 1\right)$，

从而原问题等价于求实数 a 的范围，使得在区间$\left[\dfrac{1}{3},1\right]$上，恒有 $2y_{\min}>y_{\max}$. …………………………… （8 分）

（1）当 $a=0$ 时，$y=t\left(\dfrac{1}{3}\leqslant t\leqslant 1\right)$，$y_{\min}=\dfrac{1}{3}$，$y_{\max}=1$，$\therefore 2y_{\min}<y_{\max}$ 不符合题意；

（2）当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{9}$时，$y=t+\dfrac{a}{t}$在$\left[\dfrac{1}{3},1\right]$上单调递增，

$\therefore y_{\min}=3a+\dfrac{1}{3}$，$y_{\max}=a+1$.由 $2y_{\min}>y_{\max}$，得 $a>\dfrac{1}{15}$，从而$\dfrac{1}{15}<a\leqslant\dfrac{1}{9}$；……………………… （10 分）

（3）当$\dfrac{1}{9}<a\leqslant\dfrac{1}{3}$时，$y=t+\dfrac{a}{t}$在$\left[\dfrac{1}{3},\sqrt{a}\right]$上单调递减，在$\left[\sqrt{a},1\right]$上单调递增，

$\therefore y_{\min}=2\sqrt{a}$，$y_{\max}=\max\left\{3a+\dfrac{1}{3},a+1\right\}=a+1$.

由 $2y_{\min}>y_{\max}$，得 $7-4\sqrt{3}<a<7+4\sqrt{3}$，从而$\dfrac{1}{9}<a\leqslant\dfrac{1}{3}$；…………………………………… （14 分）

（4）当$\dfrac{1}{3}<a<1$ 时，$y=t+\dfrac{a}{t}$在$\left[\dfrac{1}{3},\sqrt{a}\right]$上单调递减，在$\left[\sqrt{a},1\right]$上单调递增，

$\therefore y_{\min}=2\sqrt{a}$，$y_{\max}=\max\left\{3a+\dfrac{1}{3},a+1\right\}=3a+\dfrac{1}{3}$.

由 $2y_{\min}>y_{\max}$，得$\dfrac{7-4\sqrt{3}}{9}<a<\dfrac{7+4\sqrt{3}}{9}$，从而$\dfrac{1}{3}<a<1$；…………………………………… （16 分）

（5）当 $a\geqslant 1$ 时，$y=t+\dfrac{a}{t}$在$\left[\dfrac{1}{3},1\right]$上单调递减，

$\therefore y_{\min}=a+1$，$y_{\max}=3a+\dfrac{1}{3}$.由 $2y_{\min}>y_{\max}$，得 $a<\dfrac{5}{3}$，从而 $1\leqslant a<\dfrac{5}{3}$；……………………………… （18 分）

（6）当 $a<0$ 时，$y=t+\dfrac{a}{t}$在$\left[\dfrac{1}{3},1\right]$上单调递增，

$\therefore y_{\min}=3a+\dfrac{1}{3}$，$y_{\max}=a+1$.

由 $2y_{\min}>y_{\max}$，得 $a>\dfrac{1}{15}$，从而 a 不存在.

综上，$\dfrac{1}{15}<a<\dfrac{5}{3}$. ………………………………………………………………………………………… （20 分）