《2012 年全国中学生数学能力竞赛(初赛)试题 高二年级组》参考答案

基础能力部分(共 60 分,每题 5 分)

一、运算求解能力

1. $\frac{24}{13}$ **解析:** $\because \sin(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)=\frac{5}{13}$, $\therefore \cos x-\sin x=\frac{5\sqrt{2}}{13}$,平方得:

$1-\sin 2x=\frac{50}{169}$, $(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x=\frac{288}{169}$, $0<x<\frac{\pi}{4}$, $\sin x+\cos x=\frac{12\sqrt{2}}{13}$,

$$\therefore \frac{\cos 2x}{\cos(\frac{\pi}{4}+x)}=\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)}=\sqrt{2}(\cos x+\sin x)=\frac{24}{13}$$

2. $P(5,6)$ **解析:** 找 A 关于 l 的对称点 A', $A'B$ 与直线 l 的交点即为所求的 P 点.

3. $\frac{10}{11}$ **解析:** $\because$ 函数 $y=\log_a(x-1)+3(a>0,a\neq 1)$过定点$(2,3)$, $\therefore$ 等差数列$\{a_n\}$中,

$a_2=2, a_3=3$,即 $a_n=n$, $\therefore b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$\therefore$ 数列$\{b_n\}$的前 10 项和为 $T_{10}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{10}-\frac{1}{11}=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$

二、数据处理能力

4. 3 **解析:** 程序框图所表示的算法是求分段函数

$$y=\begin{cases}x^2, x\leqslant 2\\ 2x-3, 2<x\leqslant 5,\\ \frac{1}{x}, x>5\end{cases}$$的函数值.

当 $x\leqslant 2$ 时,令 $x^2=x$,得 $x=0$ 或 1;

当 $2 < x \leqslant 5$ 时,令 $2x - 3 = x$,得 $x = 3$;

当 $x > 5$ 时,令 $\frac{1}{x} = x$,得 $x = \pm 1$(舍去),故只有 3 个值符合题意.

5. 72. **解析:** 利用组中值估算抽样学生的平均分:

$45f_1 + 55f_2 + 65f_3 + 75f_4 + 85f_5 + 95f_6$

$= 45 \times 0.05 + 55 \times 0.15 + 65 \times 0.2 + 75 \times 0.3 + 85 \times 0.25 + 95 \times 0.05 = 72$

所以,估计这次考试的平均分是 72 分.

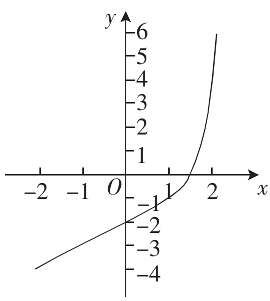
三、空间想象能力

6. 5 **解析:** 根据题意可知,几何体的最底层有 4 块长方体木块,第 2 层有 1 块长方体木块,一共有 5 块.

四、抽象概括能力

7. 6 **解析:** 由已知条件 $f(x) = (1*x) \cdot x - (2*x)(x \in [-2, 2])$ 是分段函数,

$f(x) = \begin{cases} x - 2, -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^3 - 2, 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$,图象为



$\therefore$ 最大值为 6.

8. 3 **解析:** 定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 是奇函数,

$\therefore f(0) = 0$, 又已知 $f(-2) = -3$

已知 $f(\frac{3}{2} - x) = f(x)$, $f(x)$ 为 **R** 上奇函数, $\therefore f(\frac{3}{2} + x) = f(-x) = -f(x)$, $\therefore f(x + 3) = -f(x + \frac{3}{2}) =$

$-(-f(x))=f(x)$,∴ 周期为 3.

$n=1$ 时,$S_1=2a_1+1$,即 $a_1=-1$

又∵ $S_n=2a_n+n$, $n\geqslant 2$ 时 $a_n=S_n-S_{n-1}$,

得 $a_n=2a_{n-1}-1$,得$\dfrac{a_n-1}{a_{n-1}-1}=2$,∴ $\{a_n-1\}$是等比数列,首项是 $a_1-1=-2$,公比为 2. ∴ $a_5-1=(-2)\cdot 2^4$

$=-32$,$a_6-1=(-2)\cdot 2^5=-64$,∴ $a_5=-31$,$a_6=-63$

∴ $f(a_6)=f(-63)=f(0)=0$,$f(a_5)=f(-31)=f(-1)=-f(1)=-f(-2)=3$,所以原式等于 3.

五、推理论证能力

9. $S_n=4(n-1)$

10. 91

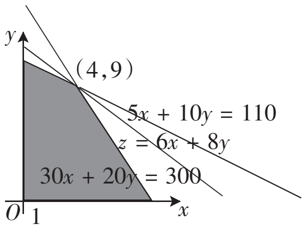
六、实践能力

11. 9600 元 **解析:**设空调和冰箱的月供应量分别为 x,y 台,月总利润为 z 百元.

则$\begin{cases}30x+20y\leqslant 300\\5x+10y\leqslant 110\\x,y\in\mathbf{N}\end{cases}$,$z=6x+8y$,作出可行域∵ $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{z}{8}$,纵截距为$\dfrac{z}{8}$,斜率为 $k=-\dfrac{3}{4}$,满足:欲 z 最

大,必$\dfrac{z}{8}$最大,此时,直线 $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{z}{8}$必过图形$\begin{cases}30x+20y=300\\5x+10y=110\\x,y\in\mathbf{N}\end{cases}$的一个交点$(4,9)$,$x,y$ 分别为 4,9, 此

时,$z=6x+8y=96$(百元)



$\therefore$ 空调和冰箱的月供应量分别为 4、9 台时,月总利润最大,最大值为 9600 元.

七、创新意识

12. 2026 **解析:** 由对数换底公式得,

$a_1a_2 = \log_2 3\log_3 4 = \log_2 4 = 2$,以此类推 ,

$a_1a_2\cdots a_6 = \log_2 3\log_3 4\cdots\log_7 8 = \log_2 8 = 3$,

$a_1a_2\cdots a_{14} = \log_2 3\log_3 4\cdots\log_{15} 16 = \log_2 16 = 4$

$a_1a_2\cdots a_{30} = \log_2 3\log_3 4\cdots\log_{31} 32 = \log_2 32 = 5$

$a_1a_2\cdots a_{62} = \log_2 3\log_3 4\cdots\log_{63} 64 = \log_2 64 = 6$

$a_1a_2\cdots a_{126} = \log_2 3\log_3 4\cdots\log_{127} 128 = \log_2 128 = 7$

$a_1a_2\cdots a_{254} = \log_2 3\log_3 4\cdots\log_{255} 256 = \log_2 256 = 8$

$a_1a_2\cdots a_{510} = \log_2 3\log_3 4\cdots\log_{511} 512 = \log_2 512 = 9$

$a_1a_2\cdots a_{1022} = \log_2 3\log_3 4\cdots\log_{1023} 1024 = \log_2 1024 = 10$

所以成功数的和为 $2 + 6 + 14 + 30 + 62 + 126 + 254 + 510 + 1022 = 2026$.

综合能力部分

13. 解析: $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2,3\}$,$A\cup B = A$,$\therefore B\subseteq A$ ………………………………………… 2 分

①$m = 0$ 时,$B = \varnothing$,$B\subseteq A$;

②$m\neq 0$ 时,由 $mx + 1 = 0$,得 $x = -\dfrac{1}{m}$. ………………………………………………………… 4 分

$\because B\subseteq A, \therefore -\frac{1}{m}\in A, \therefore -\frac{1}{m}=2$ 或 $-\frac{1}{m}=3$,得 $m=-\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{3}$ …………………………………………………… 8 分

$\therefore$ 适合题意的 m 的集合为 $\{0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\}$ …………………………………………………………………… 10 分

14. 解析:(1)由已知得,$f(x)=6\frac{1+\cos 2x}{2}-\sqrt{3}\sin 2x$

$=3\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x+3=2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x)+3=2\sqrt{3}\cos(2x+\frac{\pi}{6})+3.$

故 $f(x)$ 的最大值为 $2\sqrt{3}+3$;最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi.$ …………………………………………………… 4 分

(2)由 $f(A)=3-2\sqrt{3}$ 得 $2\sqrt{3}\cos(2A+\frac{\pi}{6})+3=3-2\sqrt{3}$,

故 $\cos(2A+\frac{\pi}{6})=-1$,又由 $0<A<\frac{\pi}{2}$ 得 $\frac{\pi}{6}<2A+\frac{\pi}{6}<\pi+\frac{\pi}{6}$,

故 $2A+\frac{\pi}{6}=\pi$,解得 $A=\frac{5\pi}{12}$.又 $B=\frac{\pi}{12}$,$\therefore C=\frac{\pi}{2}$. ………………………………………………… 8 分

$\therefore (\frac{a}{b}+\frac{b}{a})-\frac{c^2}{ab}=\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}=2\cos C=0.$ ……………………………………………………… 10 分

15. 解析:(1)$a=1$ $f(x)=x^2-|x|+1=\begin{cases}x^2-x+1, x\geqslant 0\\ x^2+x+1, x<0\end{cases}=\begin{cases}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}, x\geqslant 0\\ (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}, x<0\end{cases}$ …………… 2 分

$\therefore f(x)$ 的单调增区间为 $(\frac{1}{2},+\infty),(-\frac{1}{2},0)$

$f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,-\frac{1}{2}),(0,\frac{1}{2})$ ………………………………………………………………… 4 分

(2)由于 $a>0$,当 $x\in[1,2]$ 时,$f(x)=ax^2-x+2a-1=a(x-\frac{1}{2a})^2+2a-\frac{1}{4a}-1$

① $0<\frac{1}{2a}<1$ 即 $a>\frac{1}{2}$ 时,$f(x)$ 在 $[1,2]$ 为增函数

$g(a)=f(1)=3a-2$

② $1\leqslant \frac{1}{2a}\leqslant 2$　即$\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant \frac{1}{2}$时，$g(a)=f(\frac{1}{2a})=2a-\frac{1}{4a}-1$

③ $\frac{1}{2a}>2$　即$0<a<\frac{1}{4}$时 $f(x)$在$[1,2]$上是减函数

$g(a)=f(2)=6a-3$

综上可得 $g(a)=\begin{cases}6a-3, 0<a<\frac{1}{4}\\ 2a-\frac{1}{4a}-1, \frac{1}{4}\leqslant a\leqslant \frac{1}{2}\\ 3a-2, a>\frac{1}{2}\end{cases}$ ………………………………………………… 10 分

(3)$h(x)=ax+\frac{2a-1}{x}-1$ 在区间$[1,2]$上任取 x_1、x_2，且 $x_1<x_2$ 都成立

则 $h(x_2)-h(x_1)=(ax_2+\frac{2a-1}{x_2}-1)-(ax_1+\frac{2a-1}{x_1}-1)$

$=(x_2-x_1)(a-\frac{2a-1}{x_1x_2})=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}[ax_1x_2-(2a-1)]$ (*) ………………………………………………… 12 分

$\because h(x)$在$[1,2]$上是增函数 $\therefore h(x_2)-h(x_1)>0$

$\therefore$ (*)可转化为 $ax_1x_2-(2a-1)>0$ 对任意 x_1、$x_2\in[1,2]$且 $x_1<x_2$ 都成立

即 $ax_1x_2>2a-1$

① 当 $a=0$ 时，上式显然成立

② $a>0$　$x_1x_2>\frac{2a-1}{a}$　由 $1\leqslant x_1<2, 1<x_2\leqslant 2$ 可知 $1<x_1x_2<4$ 得$\frac{2a-1}{a}\leqslant 1$ 解得 $0<a\leqslant 1$

③ $a<0$　$x_1x_2<\frac{2a-1}{a}$ 得$\frac{2a-1}{a}\geqslant 4$ 得$-\frac{1}{2}\leqslant a<0$

所以实数 a 的取值范围是$[-\frac{1}{2},1]$ ………………………………………………… 16 分

16. **解析**:(1)设正方形 $BEFG$ 边长为 x,则$\triangle AGF$中,$AG=\dfrac{x}{\tan\theta}$, ………………………………… 2 分

于是有$\dfrac{x}{\tan\theta}+x=a\Rightarrow x=\dfrac{a}{1+\dfrac{1}{\tan\theta}}$ 得 $S_1=x^2=\left(\dfrac{a}{1+\dfrac{1}{\tan\theta}}\right)^2$ ………………………… 4 分

又 $S_2=S_{\triangle ABD}-S_1=\dfrac{a^2}{2}\tan\theta-S_1$ ………………………………………… 6 分

$y=\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\dfrac{a^2}{2}\tan\theta-S_1}{S_1}=\dfrac{1}{2}\tan\theta\left(1+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)^2-1=\dfrac{1}{2}\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)$ ………………………… 8 分

(2)因为 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 令 $\tan\theta=t>0$

得 $y=\dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{t}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)^2+2\right]$

当 $t=1$(即 $\theta=45°$)时,y 取最小值 1,此时 $BE=\dfrac{a}{2}$. ………………………………………… 16 分

17. 解析:由题意容易看出:前 n 次共倒出的纯酒精是在前 $n-1$ 次共倒出的纯酒精的基础上再加上第 n 次所倒的纯酒精,于是可得下面解法:

(1)设前 n 次共倒出纯酒精 S_n 升,则前 $n-1$ 次共倒出纯酒精 S_{n-1} 升,用水填满后,溶液的浓度为 $\dfrac{20-S_{n-1}}{20}$,倒出 1 升混合溶液中含纯酒精$\dfrac{20-S_{n-1}}{20}\times 1$ 升,所以 $S_n=S_{n-1}+\dfrac{20-S_{n-1}}{20}\times 1$ 即 $S_n-20=\dfrac{19}{20}(S_{n-1}-20)$

$\therefore \{S_n-20\}$是以$\dfrac{19}{20}$为公比的等比数列,且首项为 $S_1-20=1-20=-19$ ………………………… 8 分

$\therefore S_n-20=-19\cdot\left(\dfrac{19}{20}\right)^{n-1}$ 即 $S_n=20-19\cdot\left(\dfrac{19}{20}\right)^{n-1}$

$\therefore S_{10}=20-19\cdot\left(\dfrac{19}{20}\right)^9$ ………………………………………………… 14 分

(2)设第 n 次倒出 a_n 升纯酒精，则 $a_n = S_n - S_{n-1} = (\frac{19}{20})^{n-1}(n \geqslant 2)$ ………………………………… 16 分

$\therefore a_{12} = (\frac{19}{20})^{11}$ ……………………………………………………………………………… 18 分

18. 解析：(1)设$\{a_n\}$的公比为 q，由 $a_3 = a_1q^2$ 得 $q^2 = \frac{a_3}{a_1} = 9, q = \pm 3.$ …………………………………… 3 分

当 $q = -3$ 时，$a_1 + a_2 + a_3 = 2 - 6 + 18 = 14 < 20$，这与 $a_1 + a_2 + a_3 > 20$ 矛盾，故舍去；

当 $q = 3$ 时，$a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 6 + 18 = 26 > 20$，故符合题意. ……………………………………… 5 分

从而数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n = \frac{2(1-3^n)}{1-3} = 3^n - 1.$ ………………………………………… 8 分

(2)设数列$\{b_n\}$的公差为 d，由 $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 26$，得 $4b_1 + 6d = 26$，

又 $b_1 = 2$ 解得 $d = 3$，所以 $b_n = 3n - 1.$ ……………………………………………………… 12 分

(3)$b_1, b_4, b_7, \cdots, b_{3n-2}$ 组成以 $3d$ 为公差的等差数列，

所以 $P_n = nb_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3d = \frac{9}{2}n^2 - \frac{5}{2}n$ ……………………………………………… 14 分

$b_{10}, b_{12}, b_{14}, \cdots, b_{2n+8}$ 组成以 $2d$ 为公差的等差数列，$b_{10} = 29$，

所以 $Q_n = nb_{10} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2d = 3n^2 + 26n$， ……………………………………………… 16 分

$P_n - Q_n = (\frac{9}{2}n^2 - \frac{5}{2}n) - (3n^2 + 26n) = \frac{3}{2}n(n-19)$ ………………………………… 18 分

所以对于任意正整数 n，

当 $n \geqslant 20$ 时，$P_n > Q_n$；当 $n = 19$ 时，$P_n = Q_n$；当 $n \leqslant 18$ 时，$P_n < Q_n$. ………………… 20 分