《2012年全国中学生数学能力竞赛(初赛)试题高三年级组》参考答案

基础能力部分(共60分,每题5分)

一、运算求解能力

1. 156. **解析:** $\{a_n\}$是等差数列. $\therefore a_3+a_{11}=a_1+a_{13}=a_4+a_{10}=2a_7$.已知 $a_3+a_7+a_{11}-a_{10}-a_4=12$. $\therefore a_7=12$, $\therefore S_{13}=\frac{13(a_1+a_{13})}{2}=13a_7=156$

2. $b=-\frac{2}{3}$. **解析:** $\frac{2-bi}{1+2i}=\frac{(2-bi)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{(2-2b)-(4+b)i}{5}$, 由$\frac{(2-2b)-(4+b)}{5}=0$解得 $b=-\frac{2}{3}$.

3. $\frac{35}{44}$. **解析:** 甲袋内白球没有减少的对立事件是甲袋内白球减少,即从甲袋内取一个球应是白球,从乙袋内取一球放入甲袋内应是黑球,故所求概率为 $1-\frac{3}{8}\times\frac{6}{11}=\frac{35}{44}$.

二、数据处理能力

4. 0.38. **解析:** 由流程图知,当 $S>20$ 时,$S=S+1$,故输出的 S 值应是 10000 名教师中读书本数大于 20 本的人数,故 $S=6200$,$\therefore$ 在 0~20 本之间的频率为$\frac{10000-6200}{10000}=0.38$.

三、空间想象能力

5. $\frac{7}{3}\pi R$.

6. $V=\frac{\sqrt{2}\pi}{6}+\frac{1}{6}$. **解析:** 由三视图可得该几何体的上部分是一个三棱锥,下部分是半球,所以根据三视图中的数据可得

$$V=\frac{1}{2}\times\frac{4\pi}{3}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{\sqrt{2}\pi}{6}+\frac{1}{6}$$

四、抽象概括能力

7. 8. **解析**: 由 $f(2+x)=f(2-x)$ 得 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称,若 x_0 是 $f(x)=0$ 的根,则 $4-x_0$ 也是 $f(x)=0$ 的根,若 x_1 是 $f(x)=0$ 的根,则 $4-x_1$ 也是 $f(x)=0$ 的根,$\therefore x_0+(4-x_0)+x_1+(4-x_1)=8$,即 $f(x)=0$ 的四根之和为 8.

五、推理论证能力

8. $4n+8$.

9. $\dfrac{n^2-n+2}{2}$.

六、实践能力

10. $MP=5$. **解析:** 依题意,有 $A=2\sqrt{3}$,$\dfrac{T}{4}=3$,又 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$,$\therefore \omega=\dfrac{\pi}{6}$.

$\therefore y=2\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{6}x$,当 $x=4$ 时,$\therefore y=2\sqrt{3}\sin\dfrac{2\pi}{3}=3$, $\therefore M(4,3)$

又 $P(8,0)$,$\therefore MP=\sqrt{4^2+3^2}=5$

七、创新意识

11. 6E. **解析:** $\because A=10$,$B=11$,又 $A\times B=10\times 11=110=16\times 6+14$,

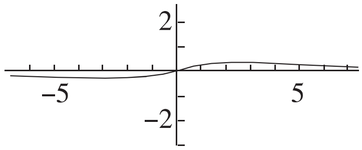
$\therefore$ 在 16 进制中 $A\times B=6E$.

12. ①④. **解析:** ①$f(x)=2x$ 显然存在 M 符合题目要求,所以它是“倍约束函数”;

②当 $x=0$ 时,$f(0)=1$,此时不可能存在 M 符合题目要求,所以 $f(x)=x^2+1$ 不是“倍约束函数”;

③$f(0)=1$ 此时不可能存在 M 符合题目要求,所以 $f(x)=\sin x+\cos x$ 不是“倍约束函数”;

④$f(0)=0$ 且经过分析可以确定其图象大致如下,如图,



可以肯定存在 M 符合题目要求，所以 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x+3}$ 是“倍约束函数”. ………………………………

所以①④符合题目要求.

综合能力部分（共 90 分）

13. 解析：(1)设乙答题所得分数为 X，则 X 的可能取值为 $-15,0,15,30$. ………………………… 1 分

$P(X=-15)=\dfrac{C_5^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{12}$；$P(X=0)=\dfrac{C_5^2C_5^1}{C_{10}^3}=\dfrac{5}{12}$；

$P(X=15)=\dfrac{C_5^1C_5^2}{C_{10}^3}=\dfrac{5}{12}$；$P(X=30)=\dfrac{C_5^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{12}$. ………………………………………………… 3 分

乙得分的分布列如下：

X	-15	0	15	30
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

4 分

$E(X)=\dfrac{1}{12}\times(-15)+\dfrac{5}{12}\times 0+\dfrac{5}{12}\times 15+\dfrac{1}{12}\times 30=\dfrac{15}{2}$. …………………………………… 5 分

(2)由已知甲、乙至少答对 2 题才能入选，记甲入选为事件 A，乙入选为事件 B.

则 $P(A)=C_3^2(\dfrac{3}{5})^2\times(\dfrac{2}{5})+(\dfrac{3}{5})^3=\dfrac{81}{125}$， ……………………………………………………… 7 分

$P(B)=\dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………………………………… 8 分

$\overline{A}$ 表示 A 的对应事件，$P(\overline{A})=1-P(A)=\dfrac{44}{125}$，$P(\overline{B})=1-P(B)=\dfrac{1}{2}$

故甲乙两人至少有一人入选的概率 $P=1-P(\overline{A}\cdot\overline{B})=1-\dfrac{44}{125}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{103}{125}$. ………………………… 10 分

14. (1)证明：连结 A_1C，与 AC_1 交于 O 点，连结 OD.

$\because O$、D 分别为 A_1C 和 BC 的中点，

$\therefore OD /\!/ A_1B$.

又 $OD\subset$ 平面 AC_1D, $A_1B\not\subset$ 平面 AC_1D,

$\therefore A_1B//$ 平面 AC_1D. ·· 4 分

(2)证明:在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,

$BB_1\perp$ 平面 ABC,又 $AD\subset$ 平面 ABC,

$\therefore BB_1\perp AD$.

$\because AB=AC$, D 为 BC 中点,

$\therefore AD\perp BC$.又 $BC\cap BB_1=B$,

$\therefore AD\perp$ 平面 B_1BCC_1.

又 $CE\subset$ 平面 B_1BCC_1, $\therefore AD\perp CE$

$\because$ 四边形 B_1BCC_1 为正方形, D, E 分别为 BC, BB_1 的中点,

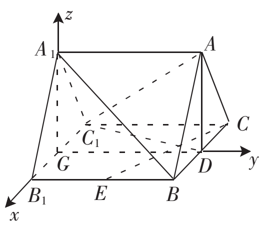
$\therefore \mathrm{Rt}\triangle CBE\cong\mathrm{Rt}\triangle C_1CD$, $\angle CC_1D=\angle BCE$.

$\therefore \angle BCE+\angle C_1DC=90^\circ$. $\therefore C_1D\perp CE$

又 $AD\cap C_1D=D$

$\therefore CE\perp$ 平面 AC_1D ·· 8 分

(3)解:如图,以 B_1C_1 的中点 G 为原点,建立空间直角坐标系,



则 $A(0,6,4)$, $E(3,3,0)$, $C(-3,6,0)$, $C_1(-3,0,0)$.

由(2)知 $CE\perp$ 平面 AC_1D,所以 $\overrightarrow{CE}=(6,-3,0)$ 为平面 AC_1D 的一个法向量.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 ACC_1 的一个法向量,

$\overrightarrow{AC}=(-3,0,-4)$, $CC_1=(0,-6,0)$.

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0.\end{cases}$可得$\begin{cases}-3x+4z=0,\\ -6y=0.\end{cases}$

令 $x=1$,则 $y=0,z=-\frac{3}{4}$.

$\therefore \boldsymbol{n}=(1,0,-\frac{3}{4})$.

从而 $\cos\langle\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{CE}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{8}{25}\sqrt{5}$.

$\because$ 二面角 $C-AC_1-D$ 为锐角,

$\therefore$ 二面角 $C-AC_1-D$ 的余弦值为$\frac{8\sqrt{5}}{25}$. ………………………………………… 12 分

15. **解析:**(1)$f(x)=\frac{p}{2}\sin2\omega x-\frac{1}{2}\cos2\omega x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{p^2+1}}{2}\sin(2\omega x-\theta)-\frac{1}{2}$,

由$\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{2}$,得 $\omega=2$ ………………………………………… 2 分

由$\frac{\sqrt{p^2+1}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$及 $p>0$,得 $p=\sqrt{3}$ ………………………………………… 4 分

$\therefore f(x)=\sin(4x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}$ ………………………………………… 6 分

(2)$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-bc}{2bc}\geqslant\frac{2bc-bc}{2bc}=\frac{1}{2}$.

$\because A$ 为三角形内角,所以 $0<A\leqslant\frac{\pi}{3}$. ………………………………………… 8 分

$\therefore -\frac{\pi}{6}<4A-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6},-\frac{1}{2}\leqslant\sin(4A-\frac{\pi}{6})\leqslant1,\therefore -1\leqslant f(A)\leqslant\frac{1}{2}$ ……………………… 12 分

16. **解析:**(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

$\because S_3=a_4+6$,

$\therefore 3a_1+3d=a_1+3d+6$. ①………………………………………… 3 分

$\because a_1,a_4,a_{13}$ 成等比数列,

$\therefore a_1(a_1+12d)=(a_1+3d)^2$. ② ………………………………………………………… 5 分

由①,②及 $d\neq 0$ 可得:$a_1=3.d=2$. ………………………………………………………… 6 分

$\therefore a_n=2n+1$. ………………………………………………………… 8 分

(2)由 $a_n=2n+1$ 可知:$S_n=\dfrac{(3+2n+1)n}{2}=n^2+2n$. ………………………………………… 10 分

所以$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$. ………………………………………… 12 分

所以$\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_{n-1}}+\dfrac{1}{S_n}$

$=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$

$=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2})=\dfrac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}$. ………………………………………… 15 分

所以数列$\{\dfrac{1}{S_n}\}$的前 n 项和为$\dfrac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}$. ………………………………………… 16 分

17. **解析:**(1)当 $a=2$ 时,$f(x)=xe^{-x}+(x-2)e^{x-2}$,$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}+e^{x-2}+(x-2)e^{x-2}=(x-1)(e^{x-2}-e^{-x})=e^{-x}(x-1)(e^{x-1}-1)(e^{x-1}+1)$,

当 $x\geqslant 1$ 时,$x-1\geqslant 0$,$e^{x-1}-1\geqslant 0$,所以$f'(x)\geqslant 0$,

当 $x<1$ 时,$x-1<0$,$e^{x-1}-1<0$,所以$f'(x)\geqslant 0$,

所以对任意实数 x,$f'(x)\geqslant 0$,所以 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数. ………………………………………… 6 分

(2)当 $x\geqslant 1$ 时,$f(x)\geqslant\dfrac{x^2-2x+1}{e^x}$恒成立,即$(x-2)e^{2x-a}-x^2+3x-1\geqslant 0$恒成立,

令 $h(x)=(x-2)e^{2x-a}-x^2+3x-1(x\geqslant 1)$,则 $h'(x)=(2x-3)(e^{2x-a}-1)$,

令 $h'(x)=(2x-3)(e^{2x-a}-1)=0$,解得 $x_1=\dfrac{3}{2}$,$x_2=\dfrac{a}{2}$, ………………………………………… 10 分

①当 $1<\dfrac{a}{2}<\dfrac{3}{2}$时,即 $2<a<3$ 时,

x	$(1,\frac{a}{2})$	$\frac{a}{2}$	$(\frac{a}{2},\frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2},+\infty)$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以要使结论成立,则:

$h(1)=-e^{2-a}+1\geqslant 0,h(\frac{3}{2})=-\frac{1}{2}e^{3-a}+\frac{5}{4}\geqslant 0$,即 $e^{2-a}\leqslant 1,e^{3-a}\leqslant\frac{5}{2}$,

解得 $a\geqslant 2,a\geqslant 3-\ln\frac{5}{2}$,所以 $3-\ln\frac{5}{2}\leqslant a<3$; …………………………………………………… 14 分

②当$\frac{a}{2}=\frac{3}{2}$,即 $a=3$ 时,$h'(x)\geqslant 0$ 恒成立,所以 $h(x)$是增函数,又 $h(1)=-e^{-1}+1>0$,

故结论成立; …………………………………………………………………………………………………… 16 分

③当$\frac{a}{2}>\frac{3}{2}$,即 $a>3$ 时,

x	$(1,\frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2},\frac{a}{2})$	$\frac{a}{2}$	$(\frac{a}{2},+\infty)$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以要使结论成立,则

$h(1)=-e^{2-a}+1\geqslant 0,h(\frac{a}{2})=-\frac{a^2}{4}+2a-3\geqslant 0$,即 $e^{2-a}\leqslant 1,a^2-8a+12\leqslant 0$,

解得 $a\geqslant 2,2\leqslant a\leqslant 6$,所以 $3<a\leqslant 6$; ………………………………………………………… 19 分

综上所述,若 $a>2$,当 $x\geqslant 1$ 时,$f(x)\geqslant\frac{x^2-2x+1}{e^x}$恒成立,实数 a 的取值范围是 $3-\ln\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant 6$.

…… 20 分

18. **解析**:(1)设 $G(x,y)$,则有$\sqrt{x^2+(y-\frac{1}{4})^2}-\frac{1}{5}=y+\frac{1}{20}$, ……………………………………………… 2 分

化简得:动点 G 的轨迹方程为:$x^2=y$ ……………………………………………………………………… 5 分

(2)①因为直线 MN 的斜率 $k_{MN}=\frac{m^2-n^2}{m-n}=m+n$,

又 $\because l \perp MN, m+n \neq 0, \therefore$ 直线的斜率 $k=-\dfrac{1}{m+n}$ ………………………………………………………… 6 分

因 M,N 两点不同, $m^2+n^2=1$, 且 $m \neq n$ $\therefore (m+n)^2<2(m^2+n^2)=2$ ………………………………… 8 分

$\therefore 0<|m+n|<\sqrt{2}, \therefore |k|>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore k<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ………………………………………………………………………… 10 分

② $\because l$ 方程为: $y-\dfrac{m^2+n^2}{2}=k(x-\dfrac{m+n}{2})$, 又 $m^2+n^2=1$

$m+n=-\dfrac{1}{k}, y-\dfrac{1}{2}=k(x+\dfrac{1}{2k}), \therefore l: y=kx+1,$

代入抛物线和椭圆方程并整理得:

$x^2-kx-1=0\cdots(1),$

$(a+2k^2)x^2+4kx+2-2a=0\cdots(2)$

易知方程(1)的判别式 $\Delta_1=k^2+4>0$ 恒成立,方程(2)的判别式 $\Delta_2=8a(2k^2+a-1)$

$\because k^2>\dfrac{1}{2}, a>0 \therefore 2k^2+a-1>a>0, \therefore \Delta_2>0$ 恒成立. ………………………………………… 14 分

$\because R(\dfrac{k}{2}, \dfrac{k^2}{2}+1), S(\dfrac{-2k}{a+2k^2}, \dfrac{a}{a+2k^2})$, 由 $\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OS}=0$ 得: $-k^2+a(\dfrac{k^2}{2}+1)=0,$

$\therefore a=\dfrac{2k^2}{k^2+2},$

$\because |k|>\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \therefore a=\dfrac{2k^2}{k^2+2}=2-\dfrac{4}{k^2+2}>2-\dfrac{4}{\dfrac{1}{2}+2}=\dfrac{2}{5}$ ………………………………… 18 分

$\dfrac{2}{5}<a<2, \because \sqrt{\dfrac{2-a}{2}}=e, \therefore a=2-2e^2>\dfrac{2}{5}, e^2<\dfrac{4}{5}, \therefore 0<e<\dfrac{2\sqrt{5}}{5}.$

$\therefore$ 椭圆 E 离心率的取值范围是 $(0, \dfrac{2\sqrt{5}}{5})$. ……………………………………………………………… 20 分