

《2012 年全国中学生数学能力竞赛(决赛)试题 初一年级组》参考答案

一、画龙点睛(本大题共 8 小题,每小题 3 分,总计 24 分)

1. 103 2. 16 3. -40 4. 2525 5. E 6. 58 7. 张斌 8. $8n + 2$

二、一锤定音(本大题共 4 道小题,每小题 3 分,总计 12 分)

9. A 10. A 11. D 12. C

三、妙笔生花(本大题共 4 道小题,13 题 6 分,14 题 7 分,15 题 8 分,16 题 9 分,总计 30 分)

13. 因为 $|a - 1| + |ab - 2| = 0$, 所以有 $a - 1 = 0$ ①和 $ab - 2 = 0$ ②, 由①得 $a = 1$, 1 分

把 $a = 1$ 代入②, 得 $b - 2 = 0$, 解得 $b = 2$ 2 分

把 $a = 1, b = 2$ 代入所求式子, 得

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{2005 \times 2006} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{2005} - \frac{1}{2006}) \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2005} - \frac{1}{2006}$$

$$= 1 - \frac{1}{2006}$$

$$= \frac{2005}{2006}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

14. (1)四个舞蹈演员跳舞为 $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ (种); 2 分

(2)六个舞蹈演员跳舞为 $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 7.2 \times 10^2$ (种); 4 分

(3)用 1、2、3、4、5、6、7 共 7 个数字排列, 可排成 $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$ (个)电话号码. 7 分

$$15. \text{ 设 } S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots + \frac{1}{5^{2012}}, \text{ ①}$$

$$\text{则 } \frac{1}{5}S = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots + \frac{1}{5^{2012}} + \frac{1}{5^{2013}}, \text{ ②} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{①} - \text{②}, \text{ 得 } \frac{4}{5}S = 1 - \frac{1}{5^{2013}}, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } S = \frac{5}{4}(1 - \frac{1}{5^{2013}}). \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

16. 由前两个图形我们能发现下面的规律:

第 1 个图形: $4 \times 4 = 16, 12 - 8 = 4, 16 \times 4 = 64$; 3 分

第 2 个图形: $3 \times 12 = 36, 9 - 3 = 6, 36 \times 6 = 216$; 6 分

第 3 个图形: $20 \times 2 = 40, 9 - 6 = 3, 40 \times 3 = 120$, 所以“?”处应填 120. 9 分

四、一鼓作气(本大题共 2 道小题,17 题 12 分,18 题 12 分,总计 24 分)

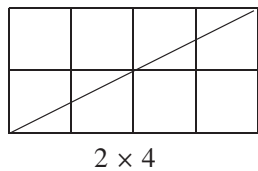
17. (1)如下表所示:

m	n	$m + n$	f
1	2	3	2
1	3	4	3
2	3	5	4
2	5	7	6
3	4	7	6

..... 2 分

对照表中数值归纳 f 与 m, n 的关系式为 $f = m + n - 1$; 7 分

(2)根据题意,我们可以举出一个反例来证明.如图 2×4 .



..... 9 分

我们发现对角线所穿过的小正方形个数 $f = 4$, 而 $m + n - 1 = 2 + 4 - 1 = 5$, 不满足 $f = m + n - 1$, ... 11 分
所以当 m, n 不互质时, 上述结论不成立. 12 分

18. (1)①13, 2 分
②31, 4 分
③25; 6 分

(2)由前两个小人的头、脚间的数知,
第 1 个小人: $3^2 + 4^2 = 5^2$, 8 分
第 2 个小人: $5^2 + 12^2 = 13^2$, 10 分
第 3 个小人: $7^2 + 24^2 = 25^2$,
因此“?”处为 25. 12 分

五、再接再厉(本大题总计 15 分)

19. 设小明的速度是 $3v$, 那么小颖的速度是 $2v$, 每层楼高为 a , 2 分
再设当小明爬到 28 楼时, 小颖爬到 x 层, 根据题意, 得 3 分
$$\frac{(x - 1)a}{2v} = \frac{(28 - 1)a}{3v},$$
 6 分
解得 $x = 19$, 8 分
 $28 - 19 = 9$, 9 分
此时他们距离是 9 个楼层的楼梯. 10 分
两人继续走, 相遇时, 小颖又走了 $9 \times \frac{2a}{3a + 2a} = 3.6$, 所以有 $3.6 + 19 = 22.6$ 13 分
因为 $22 < 22.6 < 23$, 所以小明与小颖在 22 层相遇. 14 分
答: 小明和小颖将在 22 层相遇. 15 分

六、马到成功(本大题总计 15 分)

20. 因为 $m = 111 \cdots 1$ (n 个 1), m 被 1987 整除, 所以可设 $m = 1987 \times k$, 3 分
$$p = \underbrace{11 \cdots 1}_{n \text{ 个 } 1} \underbrace{99 \cdots 9}_{n \text{ 个 } 9} \underbrace{988 \cdots 8}_{n \text{ 个 } 8} \underbrace{877 \cdots 7}_{n \text{ 个 } 7}$$

 $= m \times 10^{3n} + 9m \times 10^{2n} + 8m \times 10^n + 7m$ 8 分
 $= m(10^{3n} + 9 \times 10^{2n} + 8 \times 10^n + 7)$ 10 分
 $= 1987k(10^{3n} + 9 \times 10^{2n} + 8 \times 10^n + 7)$ 14 分
所以 p 能被 1987 整除. 15 分