

《2012 年全国中学生数学能力竞赛(决赛)试题 初二年级组》参考答案

一、画龙点睛(本大题共 8 道小题,每小题 3 分,总计 24 分)

1. 154 2. 3 3. 61° 4. 37.5° 5. $M > P$ 6. 4 7. 7 8. 6

二、一锤定音(本大题共 4 道小题,每小题 3 分,总计 12 分)

9. A 10. C 11. B 12. A

三、妙笔生花(本大题共 4 道小题,13 题 6 分,14 题 7 分,15 题 8 分,16 题 9 分,总计 30 分)

13. 根据题意,得使等式 $2\{x\} - [x] = 4$ 成立的整数 x 应满足: $2(x+1) - x = 4$ 4 分
 $\therefore x = 2$ 6 分

14. $\because \frac{xy}{x+y} = -2, \frac{yz}{y+z} = \frac{4}{3}, \frac{zx}{z+x} = -\frac{4}{3},$
 $\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{2}, \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4}, \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = -\frac{3}{4}$ 3 分

$\therefore 2(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}$ 4 分

即 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -\frac{1}{4}$ 5 分

$\therefore \frac{xy + xz + yz}{xyz} = \frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$ 6 分

$\therefore \frac{xyz}{xy + xz + yz} = -4$ 7 分

15. ①将 9 枚金币分成三组,每组 3 枚,取其中两组放在天平的两侧. 2 分

②若天平不平衡,则在较轻的一组里. 3 分

③再将这较轻组的三枚硬币选出两枚放在天平两侧. 4 分

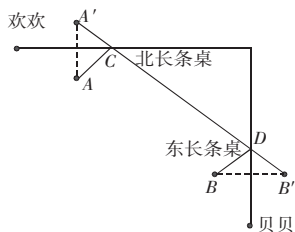
④若平衡,假币为另外一枚. 5 分

⑤若不平衡,则假币为轻的一侧的那一枚. 6 分

⑥若平衡,则假币在另外的一组里,对剩下的那一组进行③④⑤的操作方法,即可找出假币. 8 分

16. 有获胜捷径. 1 分

捷径即使所走路线最短,如下图,分别以北长条桌和东长条桌为对称轴,作 A 、 B 的对称点 A' 、 B' . 连接 $A'B'$ 与两长条桌交于 C 、 D 两点. 3 分



由轴对称的性质可知, $A'C = AC, B'D = BD$ 6 分

$\therefore AC + CD + DB = A'C + CD + DB' = A'B'$ 7 分

因为“两点之间,线段最短”,所以从 C 、 D 两点取福娃欢欢和贝贝所走的路程最短,获胜机会更大. 9 分

四、一鼓作气(本大题共 2 道小题,17 题 12 分,18 题 12 分,总计 24 分)

17. 甲戴的是白帽子. 4 分

理由如下:

因为丙说不知道,说明甲、乙中至少有一个人戴白帽子(如果甲、乙都戴黑帽子,丙马上就知道自己戴的是白帽子). 8分

因为乙说不知道,说明甲戴的是白帽子(如果甲戴黑帽子,甲、乙中至少有一个人戴白帽子,则马上就知道自己戴的是白帽子). 12分

$$18. \text{原式} = \frac{1}{2011} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2010} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2009} + \cdots + \frac{1}{2010} + \frac{1}{1} \right) - \frac{2010}{2011} \times \frac{1}{2010} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2009} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2008} + \cdots + \frac{1}{2009} + \frac{1}{1} \right) \cdots \cdots 4 \text{分}$$

$$= \frac{1}{2011} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2010} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2009} + \cdots + \frac{1}{2010} + \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2009} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2008} - \cdots - \frac{1}{2009} - \frac{1}{1} \right) \cdots \cdots 8 \text{分}$$

$$= \frac{1}{2011} \left(\frac{1}{2010} + \frac{1}{2010} \right) \cdots \cdots 9 \text{分}$$

$$= \frac{1}{2011} \times \frac{1}{1005} \cdots \cdots 10 \text{分}$$

$$= \frac{1}{2021055} \cdots \cdots 12 \text{分}$$

五、再接再厉(本大题总计 15 分)

19. (1)证明:(1) $\because \angle BDC = \angle BAC, \angle DFB = \angle AFC$ 1分

又 $\because \angle ABD + \angle BDC + \angle DFB = \angle BAC + \angle ACD + \angle AFC = 180^\circ$ 2分

$\therefore \angle ABD = \angle ACD$; 3分

(2)过点 A 作 $AM \perp CD$ 于点 M,作 $AN \perp BE$ 于点 N. 4分

则 $\angle AMC = \angle ANB = 90^\circ$.

$\because \angle ABD = \angle ACD, AB = AC, \therefore \triangle ACM \cong \triangle ABN$ 6分

$\therefore AM = AN$ 7分

$\therefore AD$ 平分 $\angle CDE$; 8分

(3) $\angle BAC$ 的度数不变化. 9分

在 CD 上截取 $CP = BD$,连接 AP 10分

$\because CD = AD + BD, \therefore AD = PD$ 11分

$\because AB = AC, \angle ABD = \angle ACD, BD = CP, \therefore \triangle ABD \cong \triangle ACP$ 13分

$\therefore AD = AP, \angle BAD = \angle CAP. \therefore AD = AP = PD$,即 $\triangle ADP$ 是等边三角形, $\therefore \angle DAP = 60^\circ$ 14分

$\therefore \angle BAC = \angle BAP + \angle CAP = \angle BAP + \angle BAD = \angle DAP = 60^\circ$ 15分

六、马到成功(本大题总计 15 分)

20. (1)因为门诊报销标准为 30%,当在门诊看病报销医疗费 180 元时,则这一年中门诊医疗总费用为 $180 \div 30\% = 600$ (元). 2分

所以这一年中门诊医疗自付费用为 $600 \times 70\% = 420$ (元); 4分

(2)由于 $5000 \leq \text{实际医疗费用 } x \leq 20\,000$,所以 5000 元按标准 30%报销,余下的部分按标准 40%报销.因此 $y = 5000 \times 30\% + (x - 5000) \times 40\%$ 6分

即 $y = 0.4x - 500(5000 \leq x \leq 20\,000)$; 8分

(3)假设该农民当年实际医疗费用不超过 20 000 元. 9分

则根据函数 $y = 0.4x - 500$ 解得按标准报销的金额为 7500 元. 10分

又因为自付医疗费 = 实际医疗费 - 按标准报销的金额 = $20\,000 - 7500 = 12\,500 < 17\,000$,所以该农民当年实际医疗费用超过 20 000 元. 12分

设该农民当年实际医疗费用为 z 元.

则 $17\,000 = z - [5000 \times 30\% + 15\,000 \times 40\% + (z - 20\,000) \times 50\%]$ 14分

解得 $z = 29\,000$.即该农民当年实际医疗费用共 29 000 元. 15分