《2012年全国中学生数学能力竞赛(决赛)试题初三年级组》参考答案

一、画龙点睛(本大题共8道小题,每小题3分,总计24分)

1. 32　2. 3∶4　3. 4　4. $\frac{27}{2}$　5. 41　6. $-3 \leqslant b \leqslant 0$

7. $x = n + 3$ 或 $x = n + 4$　8. (2、3、8、4、9),(2、4、8、3、9)

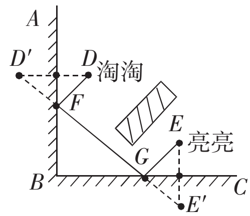
二、一锤定音(本大题共4道小题,每小题3分,总计12分)

9. B　10. D　11. B　12. B

三、妙笔生花(本大题共4道小题,13题6分,14题7分,15题8分,16题9分,总计30分)

13. 淘淘通过平面镜折射光线可以照到亮亮. ………………………………… 2分

图形如下所示,则光线所走的路线为 $D \to F \to G \to E$.



…………………………………………………… 6分

14. 以图形的序号为横坐标,棋子的枚数为纵坐标,在直角坐标系中描点(1,4)、(2,7)、(3,10)、(4,13),图略,依次连接以上各点,发现所有各点都在一条直线上. ………………………… 1分

所以设直线的解析式为 $y = kx + b$,把(1,4)、(2,7)两点代入,得 $\begin{cases} k + b = 4, \\ 2k + b = 7, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = 3, \\ b = 1. \end{cases}$ 所以 $y = 3x + 1$.

…………………………………………………… 4分

验证:当 $x = 3$ 时,$y = 10$;当 $x = 4$ 时,$y = 13$.所以另外两点也在这条直线上. ………… 5分

所以当 $x = 2012$ 时,$y = 3 \times 2012 + 1 = 6037$.即第2012个图形共有6037枚棋子. ………… 7分

15. $\because abc \neq 0$,$\therefore$ 把第二个等式两边同乘以 abc,得 $a^2(c + b) + b^2(a + c) + c^2(b + a) = -3abc$,整理,得 $ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) + abc + abc + abc = 0$,即 $(a + b + c)(ab + bc + ac) = 0$,$\therefore a + b + c = 0$ 或 $ab + bc + ac = 0$. ………………………………………… 5分

当 $ab + bc + ac = 0$ 时,由 $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 1$,得 $a + b + c = \pm 1$.$\therefore a + b + c = 0$ 或1或-1. ………………………………………… 8分

16. 设原来篮子 A 中有 x 个弹珠,则篮子 B 中有 $(25 - x)$ 个弹珠. ………………… 1分

再设原来篮子 A 中弹珠号码的平均数为 a,篮子 B 中弹珠号码的平均数为 b. ………… 2分

则由题意,得 $\begin{cases} ax + (25 - x)b = 1 + 2 + \cdots + 25 = 325, \\ \dfrac{ax - 15}{x - 1} - a = \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{b(25 - x) + 15}{(25 - x) + 1} - b = \dfrac{1}{4}, \end{cases}$ ………………………… 6分

解得 $x = 9$.所以原来篮子 A 中有9个弹珠. ………………………………… 9分

四、一鼓作气(本大题共2道小题,17题12分,18题12分,总计24分)

17. (1)①$\because 5+2=7$，$\therefore$ 等式左边的三位数是 275，等式右边的三位数是 572，即 $52 \times 275 = 572 \times 25$；
…… 2 分

②$\because$ 等式左边的三位数是 396，$\therefore$ 等式左边的两位数是 63，等式右边的两位数是 36，即 $63 \times 396 = 693 \times 36$.
…… 4 分

(2)$\because$ 等式左边两位数的十位数字为 a，个位数字为 b，$\therefore$ 等式左边的两位数是 $10a+b$，三位数是 $100b+10(a+b)+a$，等式右边的两位数是 $10b+a$，三位数是 $100a+10(a+b)+b$，$\therefore$ 一般规律的式子为 $(10a+b) \times [100b+10(a+b)+a] = [100a+10(a+b)+b] \times (10b+a)$. …… 8 分

证明：左边 $=(10a+b) \times [100b+10(a+b)+a] = (10a+b)(100b+10a+10b+a) = (10a+b)(110b+11a) = 11(10a+b)(10b+a)$. 右边 $= [100a+10(a+b)+b] \times (10b+a) = (100a+10a+10b+b)(10b+a) = (110a+11b)(10b+a) = 11(10a+b)(10b+a)$. 所以左边 = 右边. …… 12 分

18. 由方程①，知 $x_1 \cdot x_2 < 0, x_1 > |x_2| > 0$，$\therefore x_1 > 0$，$\therefore x_2 < 0$. …… 2 分

$\because \Delta = [-(m+2)]^2 - 4(m-2) = m^2 + 12 > 0$，$\therefore x_1 + x_2 = m + 2 > 0, x_1 \cdot x_2 = m - 2 < 0$，$\therefore -2 < m < 2$.
…… 4 分

由方程②，知 $\dfrac{m^2-3}{m} = 2$，$\therefore m = 3$（不合题意，舍去）或 $m=-1$. …… 6 分

把 $m=-1$ 代入方程②，得 $x^2-(n-2)x+2=0$，$\because$ 方程的两个根为有理数，$\therefore$ 设 $\Delta = [-(n-2)]^2 - 8 = k^2$，$\therefore \Delta = (n-2+k)(n-2-k) = 8$. $\therefore \begin{cases} n-2+k=4, \\ n-2-k=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} n-2+k=-2, \\ n-2-k=-4, \end{cases}$ $\therefore n=5$ 或 $n=-1$. …… 12 分

五、再接再厉（本大题总计 15 分）

19. 从四张不同面值的邮票中选取面值互不相同且不超过三张的不同取法共有 $4+6+4=14$（种）. 不同取法所获得邮票的总面值可能相同，也可能不同，至多只有 14 种不同的总面值，所以 $R \leqslant 14$. …… 5 分

又若设计四张邮票的面值数分别为 1、2、4、8. …… 10 分

因为 $1=1, 2=2, 3=1+2, 4=4, 5=1+4, 6=2+4, 7=1+2+4, 8=8, 9=1+8, 10=2+8, 11=1+2+8, 12=4+8, 13=1+4+8, 14=2+4+8$，$\therefore R \leqslant 14$.

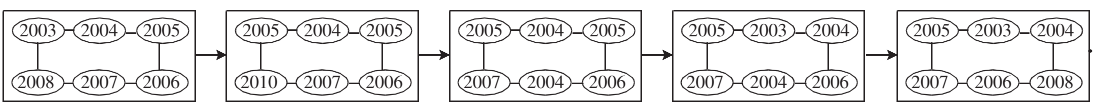
从而 R 的最大值为 14.

上述四张面值数的邮票作为一套，即是符合题意的设计. …… 15 分

六、马到成功（本大题总计 15 分）

20. (1)能. …… 2 分

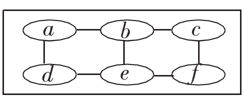
变化过程如下：



…… 7 分

(2)不能. …… 9 分

因为每一步都改变（如下图）：$S=(d+b+f)-(a+e+c)$ 是一个定值. …… 12 分



而图 1 中 $S_1 = (2008+2004+2006) - (2003+2007+2005) = 3$. …… 13 分

图 3 中 $S_3 = (2005+2003+2007) - (2008+2006+2004) = -3$. …… 14 分

显然 $S_1 \neq S_3$，所以不能从图 1 得到图 3. …… 15 分