《2012 年全国中学生数学能力竞赛(决赛)试题 高一年级组》参考答案

基础能力部分(共 60 分,每题 5 分)

一、运算求解能力

1. 1　**2.** $\frac{303}{2}$　**3.** 2006

二、数据处理能力

4. 4400

三、空间想象能力

5. 177

四、抽象概括能力

6. 1

五、推理论证能力

7. 89

六、实践能力

8. 3800

9. 60

10. 0.47 m^2

七、创新意识

11. $\frac{3}{2}$

12. $\{-\sqrt{2},\sqrt{6}\}$

综合能力部分(共 90 分)

13. 解:(1)当 $a=2$ 时,$f(x)=|x+1|+|2x+1|=\begin{cases}-3x-2, x\leqslant -1\\ -x, -1<x<-\frac{1}{2}\\ 3x+2, x\geqslant -\frac{1}{2}\end{cases}$, ……………………………… (2 分)

$\therefore$ 当 $x\leqslant -1$ 时,$f(x)$递减,

故 $f(x)\geqslant f(-1)=1$;

当 $-1<x<-\frac{1}{2}$ 时,$f(x)$递减,

故 $f(x)>f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$;

当 $x\geqslant -\frac{1}{2}$ 时,$f(x)$递增,

故$f(x) \geqslant f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$,

因此,$f(x)$的最小值为$\frac{1}{2}$; …………………………………………………………………………（4 分）

(2)由$f(-1)=f(1)$,得 $2+|a+1|=|1-a|$ (*),

两边平方后,整理,得$|a+1|=-(a+1)$

$\therefore a \leqslant -1$ ①. …………………………………………………………………………（5 分）

同理,由$f(-\frac{1}{a})=f(\frac{1}{a})$,得$2+\left|\frac{1}{a}+1\right|=\left|1-\frac{1}{a}\right|$,

对比(*)式,可得$\frac{1}{a} \leqslant -1$, …………………………………………………………（6 分）

$\therefore -1 \leqslant a<0$ ②.

由①②,得 $a=-1$. ……………………………………………………………………（10 分）

14. 解:二次函数$f(x)=x^2-2ax-1$,开口向上,且对称轴方程$x=a$,当$x\in[a,+\infty)$时为增函数,当$x\in(-\infty,a]$时为减函数.

若$a<0$时,$x\in[0,2]$在二次函数的增区间上.当$x=2$时,$f(x)$有最大值$f(2)=3-4a$.当$x=0$时,$f(x)$有最小值$f(0)=-1$. ……………………………………………………………………（2 分）

若$a>2$时,$x\in[0,2]$在二次函数的减区间上.当$x=0$时,$f(x)$有最大值$f(0)=-1$.当$x=2$时,$f(x)$有最小值$f(2)=3-4a$. ……………………………………………………………………（4 分）

若$0 \leqslant a<1$时,$f(x)$在$[0,a]$上为减函数,在$[a,2]$上为增函数.当$x=2$时,$f(x)$有最大值$f(2)=3-4a$.当$x=a$时,$f(x)$有最小值$f(a)=-1-a^2$. ……………………………………………（6 分）

若$1 \leqslant a \leqslant 2$时,$f(x)$在$[0,a]$上为减函数,在$[a,2]$上为增函数.当$x=0$时,$f(x)$有最大值$f(0)=-1$.当$x=a$时,$f(x)$有最小值$f(a)=-1-a^2$. ……………………………………………（10 分）

15. 从后向前推,如果 1–3 号强盗都喂了鲨鱼,只剩 4 号和 5 号的话,5 号一定投反对票让 4 号喂鲨鱼,以独吞全部金币.所以,4 号惟有支持 3 号才能保命.3 号知道这一点,就会提(100,0,0)的分配方案,对 4 号、5 号一毛不拔而将全部金币归为已有,因为他知道 4 号一无所获但还是会投赞成票,再加上自己一票,他的方案即可通过.不过,2 号推知到 3 号的方案,就会提出(98,0,1,1)的方案,即放弃 3 号,而给予 4 号和 5 号各一枚金币.由于该方案对于 4 号和 5 号来说比在 3 号分配时更为有利,他们将支持他而不希望他出局而由 3 号来分配.这样,2 号将拿走 98 枚金币.不过,2 号的方案会被 1 号所洞悉,1 号并将提出(97,0,1,2,0)或(97,0,1,0,2)的方案,即放弃 2 号,而给 3 号一枚金币,同时给 4 号(或 5 号)2 枚金币.由于 1 号的这一方案对于 3 号和 4 号(或 5 号)来说,相比 2 号分配时更优,他们将投 1 号的赞成票,再加上 1 号自己的票,1 号的方案可获通过,97 枚金币可轻松落入囊中.这无疑是 1 号能够获取最大收益的方案了! …………（15 分）

16. 解:(1)设集合$A\subseteq\{1,2,\cdots,2^3-1\}$,且$A$满足$(a)$,$(b)$,则$1\in A$,$7\in A$.由于$\{1,m,7\}(m=2,3,\cdots,6)$不满足$(b)$,故$|A|>3$.

又$\{1,2,3,7\}$,$\{1,2,4,7\}$,$\{1,2,5,7\}$,$\{1,2,6,7\}$,$\{1,3,4,7\}$,$\{1,3,5,7\}$,$\{1,3,6,7\}$,$\{1,4,5,7\}$,$\{1,4,6,7\}$,$\{1,5,6,7\}$都不满足(b),故$|A|>4$.

而集合$\{1,2,4,6,7\}$满足(a),(b),$\therefore f(3)=5$; …………………………………………（6 分）

(2)首先证明:$f(n+1) \leqslant f(n)+2$,$n=3,4\cdots$ ①.

事实上,若$A\subseteq\{1,2,\cdots,2^n-1\}$,满足$(a)$,$(b)$,且$A$的元素个数为$f(n)$.

令$B=A\cup\{2^{n+1}-2,2^{n+1}-1\}$,由于$2^{n+1}-2>2^n-1$,故$|B|=f(n)+2$.

又$2^{n+1}-2=2(2^n-1)$,$2^{n+1}-1=1+(2^{n+1}-2)$,$\therefore$集合$B\subseteq\{1,2,\cdots,2^{n+1}-1\}$,且$B$满足$(a)$,$(b)$.从而$f(n+1) \leqslant |B|=f(n)+2$. ……………………………………………………………（8 分）

其次证明:$f(2n) \leqslant f(n)+n+1, n=3,4,\cdots$ ②.

事实上,设 $A \subseteq \{1,2,\cdots,2^n-1\}$满足$(a)$,$(b)$,且 A 的元素个数为 $f(n)$.

令 $B=A \cup \{2(2^n-1), 2^2(2^n-1), \cdots, 2^n(2^n-1), 2^{2n}-1\}$,

由于 $2(2^n-1)<2^2(2^n-1)<\cdots<2^n(2^n-1)<2^{2n}-1$,

$\therefore B \subseteq \{1,2,\cdots,2^{2n}-1\}$,且$|B|=f(n)+n+1$.

而 $2^{k+1}(2^n-1)=2^k(2^n-1)+2^k(2^n-1), k=0,1,\cdots,n-1, 2^{2n}-1=2^n(2^n-1)+(2^n-1)$,

从而 B 满足(a),(b),于是$f(2n) \leqslant |B|=f(n)+n+1$. …………………………………………… (12 分)

由①,②得$f(2n+1) \leqslant f(n)+n+3$ ③.

反复利用②,③,可得$f(100) \leqslant f(50)+50+1 \leqslant f(25)+25+1+51 \leqslant f(12)+12+3+77 \leqslant f(6)+6+1+92 \leqslant f(3)+3+1+99=108$. ……………………………………………………………………………… (15 分)

17. 解:首先证明$f(1)=1$.

令 $x=0, y=1$,则$f(0)=2f(0)f(1)$,$\therefore f(0)=0$ 或$f(1)=\frac{1}{2}$;

令 $x=0, y=0$,则$f(1)=[f(0)]^2+[f(1)]^2$;令 $x=y=\frac{1}{2}$,则$f(1)=2[f(\frac{1}{2})]^2$.

若$f(1)=\frac{1}{2}$,则$f(0)=\pm\frac{1}{2}$.

$\because f(x)$在$[0,1]$上单调递增,$\therefore f(0)<f(\frac{1}{2})<f(1)$,矛盾.

因此$f(0)=0, f(1)=[f(1)]^2, f(1)=1$. ……………………………………………………………………… (4 分)

令 $y=0$,则$f(x+1)=f(x)f(0)+f(1-x)f(1)=f(1-x)$.

再证$f(-1)=-1$.

令 $x=\frac{1}{2}, y=\frac{3}{2}$,$\therefore f(0)=f(\frac{1}{2})f(\frac{3}{2})+f(\frac{1}{2})f(-\frac{1}{2})$.

$\because f(\frac{1}{2})>f(0)=0$,$\therefore f(-\frac{1}{2})=-f(\frac{3}{2})=-f(\frac{1}{2})$.

令 $y=2$,有$f(x-1)=f(x)f(2)+f(1-x)f(-1)$.

对上式令 $x=\frac{1}{2}$,则$f(-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})f(-1)$,$\therefore f(-1)=-1$. ………………………………………… (8 分)

$\therefore$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$,恒有$f(x-1)=-f(1-x)$,

即对任意的 $x \in \mathbf{R}$,恒有$f(-x)=-f(x)$,$\therefore f(x)$是奇函数.

对于任意 $x \in \mathbf{R}$,$f(x)=f(2-x)=-f(x-2)=-f(4-x)=f(x-4)$,

从而$f(x)$的最小正周期为 4. ………………………………………………………………………………… (10 分)

令 $x=\frac{1}{3}, y=\frac{2}{3}$,$f(\frac{2}{3})=2f(\frac{1}{3})f(\frac{2}{3})$. $\because f(\frac{2}{3})>f(0)=0$,$\therefore f(\frac{1}{3})=\frac{1}{2}$.

根据图像$f(\frac{5}{3})=\frac{1}{2}$,$\therefore 2f(x+1)-1 \geqslant 0$ 得到$\frac{1}{3}+4k \leqslant x+1 \leqslant \frac{5}{3}+4k, k \in \mathbf{Z}$,

$\therefore$ 不等式的解集是$\{x \mid 4k-\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 4k+\frac{2}{3}, k \in \mathbf{Z}\}$. ………………………………………… (20 分)

18. 解:(1)由$f(x)=ax+b$ 和 $g(x)=ax^2+bx+c$,得 $ax^2-(a-b)x+c-b=0$, ………………… (2 分)

则 $\Delta=(a+b)^2-4ac$.又$\because a>b>c$,且 $a+b+c=0(a,b,c \in \mathbf{R})$,

则 $a>0,c<0,\therefore \Delta>0$， ………………………………………………………………（4 分）

$\therefore$ 函数 $y=f(x)$与 $y=g(x)$的图象有两个不同的交点 A,B； ……………………………………（6 分）

(2)由 $x_1+x_2=\dfrac{(a-b)}{a},x_1x_2=\dfrac{(c-b)}{a}$，

则 $|A_1B_1|=|x_1-x_2|=\sqrt{(\dfrac{c}{a}-2)^2-4}$. ………………………………………………（8 分）

又 $\because a>b>c$，且 $a+b+c=0(a,b,c\in\mathbf{R})$，

则 $-2<\dfrac{c}{a}<-\dfrac{1}{2}$，$|A_1B_1|\in(\dfrac{3}{2},2\sqrt{3})$； ……………………………………………（10 分）

(3)设 $F(x)=g(x)-f(x)=ax^2-(a-b)x+c-b$ 的两根为 x_1,x_2 满足 $x_1<x_2$，

则 $x_2-x_1<2\sqrt{3}$. ……………………………………………………………………（12 分）

又 $\because y=F(x)$的对称轴为 $x=\dfrac{a-b}{2a}>0$，于是$\dfrac{a-b}{2a}-x_1<\sqrt{3}$，

$\therefore -\sqrt{3}<\dfrac{a-b}{2a}-\sqrt{3}<x_1<\dfrac{a-b}{2a}$，

由此，得当 $x\leqslant-\sqrt{3}$ 时，$x<x_1<\dfrac{a-b}{2a}$. ……………………………………………（16 分）

又 $a>0$，知 $F(x)$在$(-\infty,\dfrac{a-b}{2a})$上为单调递减函数，于是，$F(x)<F(x_1)=0$，

即当 $x\leqslant-\sqrt{3}$ 时 $f(x)<g(x)$恒成立. ……………………………………………………（20 分）