《2012年全国中学生数学能力竞赛(决赛)试题高二年级组》参考答案

基础能力部分(共60分,每题5分)

一、运算求解能力

1. 13.

2. $c=10$ 或 $c=-68$. **解析:** ∵弦长为8,圆半径为5,∴弦心距为$\sqrt{5^2-4^2}=3$,∵圆心坐标为$(1,-2)$,

∴ $\dfrac{|5\times1-12\times(-2)+c|}{13}=3$,∴ $c=10$ 或 $c=-68$.

3. -81.

二、数据处理能力

4. 510. **解析:** 本程序是计算 $S=2^1+2^2+\cdots2^8=\dfrac{2(1-2^8)}{1-2}=510$.

5. 54. **解析:** 前两组中的频数为 $100\times(0.05+0.11)=16$.

∵后五组频数和为62,∴前三组频数和为38.∴第三组频数为22.

又最大频率为0.32,故频数为 $0.32\times100=32$,

∴ $a=22+32=54$

三、空间想象能力

6. 6. **解析:** 根据三视图间的关系可得 $BC=2\sqrt{3}$,

∴侧视图中 $VA=\sqrt{4^2-(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$,

∴ $S_{\triangle VBC}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=6$.

四、抽象概括能力

7. $\dfrac{3}{2}$.

8. 0.

五、推理论证能力

9. 食指.

10. 4.

六、实践能力

11. 650.

七、创新意识

12. 676. **解析:** 设两个连续偶数为 $2k+2$ 和 $2k$,则 $(2k+2)^2-(2k)^2=4(2k+1)$,故和平数的特征是4的倍数,但不是8的倍数,故在1~100之间,能称为和平数的有 $4\times1,4\times3,4\times5,4\times7,\cdots,4\times25$,即1~25之间的奇数个数,共计13个,其和为 $4\times\dfrac{1+25}{2}\times13=676$.

13. 解析：(1)取 CE 的中点 P，连 PM，PB，在 $\triangle CDE$ 中，由 P，M 分别是 CE，DE 中点知，

$PM /\!/ CD$，且 $PM=\frac{1}{2}CD$，又 $NB /\!/ CD$，且 $NB=\frac{1}{2}CD$，所以 $PM /\!/ NB$，且 $PM=NB$，所以四边形 $PMNB$ 是平行四边形，所以 $MN /\!/ PB$，又 PB 在平面 BEC 中，MN 不在平面 BEC 中，所以 $MN /\!/$ 平面 BCE. ……………5 分

(2)因为平面 $ABCD\perp$ 平面 ABE，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABE=AB$，$BC\perp AB$，

所以 $BC\perp$ 平面 ABE，又 $AE\subset$ 平面 ABE，所以 $BC\perp AE$，

又 $AE\perp BE$，BC，BE 为平面 BCE 内两相交直线，

所以，$AE\perp$ 平面 BCE，因为 PB 在平面 BCE 内，所以 $AE\perp PB$，

由(1)$MN /\!/ PB$，所以 $AE\perp MN$. ……………………………………………………10 分

14. 解析：(1)条件可化为：$\because(\sqrt{2}a-c)\cos B=b\cos C$.根据正弦定理有

$(\sqrt{2}\sin A-\sin C)\cos B=\sin B\cos C$. $\therefore\sqrt{2}\sin A\cos B=\sin(C+B)$，

即 $\sqrt{2}\sin A\cos B=\sin A$，$\because\sin A>0$，$\therefore\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $B=\frac{\pi}{4}$. ……………………………………4 分

(2)$\because\left|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{6}$，$\therefore\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{6}$，即 $b^2=6$，根据余弦定理

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 可得 $6=a^2+c^2-\sqrt{2}ac$. ……………………………………6 分

由基本不等式可知 $6=a^2+c^2-2ac\geqslant 2ac-\sqrt{2}ac=(2-\sqrt{2})ac$.

即 $ac\leqslant 3(2+\sqrt{2})$，故 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{2}}{4}ac\leqslant\frac{3(\sqrt{2}+1)}{2}$. ……………………8 分

即当 $a=c=\sqrt{6+3\sqrt{2}}$ 时，$\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $\frac{3(\sqrt{2}+1)}{2}$. ……………………………10 分

15. 解析：(1)因为间隔时间相同，故是系统抽样. ……………………………………3 分

(2)茎叶图如下：

甲		乙
	7	5
	8	5
9 9 8 8	9	0
3 2 1	10	
	11	0 0 5 5

……………………………………………………………………7 分

(3)甲车间：

平均值：$\overline{x_1}=\frac{1}{7}(102+101+99+98+103+98+99)=100$，

方差：$s_1^2=\frac{1}{7}[(102-100)^2+(101-100)^2+\cdots+(99-100)^2]\approx 3.43$. ……………………11 分

乙车间：

平均值：$\overline{x_2}=\frac{1}{7}(110+115+90+85+75+115+110)=100$，

方差：$s_2^2=\frac{1}{7}[(110-100)^2+(115-100)^2+\cdots+(110-100)^2]\approx 228.57$. ……………………15 分

$\because\overline{x_1}=\overline{x_2}$，$s_1^2<s_2^2$，$\therefore$ 甲车间的产品稳定. ……………………………………16 分

16. (1)证明：在$f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$中，

令$m=1,n=0$，得$f(1)=f(1)f(0)$.

$\because 0<f(1)<1, \therefore f(0)=1$. ……2分

设$x<0$，则$-x>0$.令$m=x,n=-x$，代入条件式有$f(0)=f(x)\cdot f(-x)$，而$f(0)=1$，

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{f(-x)}>1$. ……4分

(2)证明：设$x_1<x_2$，则$x_2-x_1>0$，$\therefore 0<f(x_2-x_1)<1$.

令$m=x_1,m+n=x_2$，则$n=x_2-x_1$，代入条件式，得$f(x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2-x_1)$，……6分

由已知及(1)得$f(x_1)>0$

$\therefore 0<\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}<1$. $\therefore f(x_2)<f(x_1)$. ……8分

$\therefore f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减. ……9分

(3)解：由$f(x^2)\cdot f(y^2)>f(1)\Rightarrow f(x^2+y^2)>f(1)$. ……11分

又由(2)知$f(x)$为$\mathbf{R}$上的减函数，$\therefore x^2+y^2<1\Rightarrow$点集$A$表示圆$x^2+y^2=1$的内部.

由$f(ax-y+2)=1$得$ax-y+2=0\Rightarrow$点集B表示直线$ax-y+2=0$.

$\because A\cap B=\varnothing$，$\therefore$直线$ax-y+2=0$与圆$x^2+y^2=1$相离或相切. ……14分

于是$\dfrac{2}{\sqrt{a^2+1}}\geqslant 1\Rightarrow -\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$. ……16分

17. **解析**：设此次砌墙一共用了S块砖，砌好第n层后剩下砖块为a_n块($1\leqslant n\leqslant 10,n\in\mathbf{N}^*$)

则$a_n=\dfrac{a_{n-1}}{2}-1$，即$a_n+2=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+2)$ ……4分

$\therefore \{a_n+2\}$为等比数列，且公比为$\dfrac{1}{2}$. ……7分

又由题意得：$a_1=\dfrac{S}{2}-1$

$\therefore a_1+2=\dfrac{S}{2}+1$

$\therefore a_n+2=(\dfrac{S}{2}+1)\cdot(\dfrac{1}{2})^{n-1}$

即$a_n=(\dfrac{S}{2}+1)\cdot(\dfrac{1}{2})^{n-1}-2$ ……12分

$\because a_{10}=0$

$\therefore (\dfrac{S}{2}+1)\cdot(\dfrac{1}{2})^9-2=0$ ……14分

解得：$S=2^{11}-2=2046$ ……18分

18. **解析**(1)$\because a_{n+1}=a_n+6a_{n-1}$，

$\therefore a_{n+1}+2a_n=3a_n+6a_{n-1}=3(a_n+2a_{n-1})$.

又$a_1=5,a_2=5$，

$\therefore a_2+2a_1=15$，

$\therefore a_n+a_{n+1}\neq 0$，

$\therefore \dfrac{a_{n+1}+2a_n}{a_n+2a_{n-1}}=3$，

$\therefore$ 数列$\{a_{n+1}+2a_n\}$是以 15 为首项,3 为公比的等比数列.…………………………………………………… 6 分

(2)由(1)得 $a_{n+1}+2a_n=15\times 3^{n-1}=5\times 3^n$,

即 $a_{n+1}=-2a_n+5\times 3^n$, ……………………………………………………………………………………………8 分

$\therefore a_{n+1}-3^{n+1}=-2(a_n-3^n)$.

又 $\because a_1-3=2$,

$\therefore a_n-3^n\neq 0$,

$\therefore\{a_n-3^n\}$是以 2 为首项,-2 为公比的等比数列.

$\therefore a_n-3^n=2\times(-2)^{n-1}$,即 $a_n=2\times(-2)^{n-1}+3^n(n\in\mathbf{N}^*)$. ……………………………………………10 分

(3)由(2)及 $3^nb_n=n(3^n-a_n)$,可得

$3^nb_n=-n(a_n-3^n)=-n[2\times(-2)^{n-1}]=n(-2)^n$,

$\therefore b_n=n(-\frac{2}{3})^n$,

$\therefore|b_n|=n(\frac{2}{3})^n$. ……………………………………………………………………………………………………13 分

$\therefore T_n=|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|$

$=\frac{2}{3}+2\times(\frac{2}{3})^2+\cdots+n\times(\frac{2}{3})^n$,① ………………………………………………………………15 分

①$\times\frac{2}{3}$,得

$\frac{2}{3}T_n=(\frac{2}{3})^2+2\times(\frac{2}{3})^3+\cdots+(n-1)\times(\frac{2}{3})^n+n\times(\frac{2}{3})^{n+1}$,② ………………………………17 分

①-②得

$\frac{1}{3}T_n=\frac{2}{3}+(\frac{2}{3})^2+\cdots+(\frac{2}{3})^n-n\times(\frac{2}{3})^{n+1}$

$=2-3\times(\frac{2}{3})^{n+1}-n(\frac{2}{3})^{n+1}$

$=2-(n+3)(\frac{2}{3})^{n+1}$,

$\therefore T_n=6-2(n+3)(\frac{2}{3})^n$. ……………………………………………………………………………………………20 分