《2012年全国中学生数学能力竞赛(决赛)试题高三年级组》参考答案

基础能力部分(共60分,每题5分)

一、运算求解能力

1. $-\frac{56}{65}$. **解析:** $\because \frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3\pi}{4}$ $\therefore \pi<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}, 0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{4}$

$\because \sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}, \cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$ $\therefore \cos(\alpha+\beta)=-\frac{4}{5}$ $\sin(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$

$\therefore \sin2\alpha=\sin[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=-\frac{56}{65}$.

2. $\frac{10}{27}$. **解析:** 下三局,每局都有赢、和、输三种可能,共有 $3^3=27$ 种,甲取胜分三类:①胜一局,和二局,有3种;②胜二局,另一局输和均可,有6种;③胜三局,有1种.故甲取胜概率为$\frac{10}{27}$.

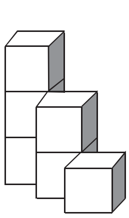
3. $\sqrt{3}+1$.

二、数据处理能力

4. 153000.

三、空间想象能力

5. 6. 如图所示摆放

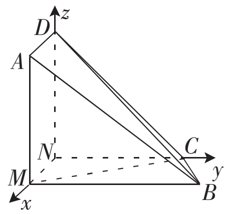


6. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **解析:** 由已知平面 $AMND\perp$平面 $MBCN$,

且平面 $AMND\cap$平面 $MBCN=MN, DN\perp MN$,

所以 $DN\perp$ 平面 $MBCN$,又 $MN\perp NC$,

故以点 N 为坐标原点,建立空间直角坐标系 $N-xyz$.



由已知得 $MC=2\sqrt{3}$,$\angle MCN=30°$,易得 $MN=\sqrt{3}$,$NC=3$.则 $D(0,0,3)$,$C(0,3,0)$,$B(\sqrt{3},4,0)$.$\overrightarrow{DC}$

$=(0,3,-3)$,$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{3},1,0)$.

设平面 DBC 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CB}=0.\end{cases}$ 即$\begin{cases}3y-3z=0,\\ \sqrt{3}x+y=0.\end{cases}$ 令 $x=-1$,则 $y=\sqrt{3}$,$z=\sqrt{3}$.所以 $\boldsymbol{n}_1=(-1,\sqrt{3},\sqrt{3})$.

又 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$是平面 NBC 的一个法向量, 所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

故所求二面角 $D-BC-N$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

四、抽象概括能力

7. $c<-1$ 或 $c>2$. **解析:**(1)$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$,$f'(x)=3x^2+2ax+b$

由 $f'(-\frac{2}{3})=\frac{12}{9}-\frac{4}{3}a+b=0$,$f'(1)=3+2a+b=0$ 得 $a=-\frac{1}{2}$,$b=-2$

$f'(x)=3x^2-x-2=(3x+2)(x-1)$,函数 $f(x)$的单调区间如下表:

x	$(-\infty,-\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↙	极小值	↗

所以 $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+c$,$x\in[-1,2]$,当 $x=-\frac{2}{3}$时,$f(-\frac{2}{3})=\frac{22}{27}+c$ 为极大值,而 $f(2)=2+c$,则

$f(2)=2+c$ 为最大值，要使 $f(x)<c^2, x\in[1,2]$ 恒成立，则只需要 $c^2>f(2)=2+c$，得 $c<-1$，或 $c>2$.

五、推理论证能力

8. $3n^2-3n+1$.

9. $a_n=3^{n-1}$.

六、实践能力

10. $(0.1+p)a$.

七、创新意识

11. $\{a_1,a_2,a_5,a_7,a_8\}$.

12. ①③.

综合能力部分(共 90 分)

13. **解析：**(1)设数学辅导讲座在周一、周三、周五都不满座为事件 A，则

$P(A)=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{2}{3})(1-\frac{2}{3})=\frac{1}{18}$ ······························ 2 分

(2) ξ 可能取值为 0,1,2,3,4,5

$P(\xi=0)=(1-\frac{1}{2})^4\cdot(1-\frac{2}{3})=\frac{1}{48}$

$P(\xi=1)=C_4^1\cdot\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})^3\cdot(1-\frac{2}{3})+(1-\frac{1}{2})^4\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{8}$

$P(\xi=2)=C_4^2\cdot(\frac{1}{2})^2(1-\frac{1}{2})^2\cdot(1-\frac{2}{3})+C_4^1\cdot\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})^3\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{24}$

$P(\xi=3)=C_4^3\cdot(\frac{1}{2})^3(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{2}{3})+C_4^2\cdot(\frac{1}{2})^2\cdot(1-\frac{1}{2})^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$P(\xi=4)=(\frac{1}{2})^4(1-\frac{2}{3})+C_4^3\cdot(\frac{1}{2})^3\cdot(1-\frac{1}{2})\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{16}$

$P(\xi=5)=(\frac{1}{2})^4\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{24}$ ······························ 8 分

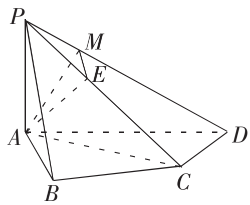
所以,随机变量 ξ 的分布列如下:

ξ	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{24}$

$E(\xi)=0\times\frac{1}{48}+1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{7}{24}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{3}{16}+5\times\frac{1}{24}=\frac{8}{3}$ ………………………… 10 分

14. **解析**:(1)在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,因 $PA\perp$ 底面 $ABCD$,$AB\subset$ 平面 $ABCD$,故 $PA\perp AB$.

又 $AB\perp AD$,$PA\cap AD=A$,从而 $AB\perp$ 平面 PAD.故 PB 在平面 PAD 内的射影为 PA,从而 $\angle APB$ 为 PB 和平面 PAD 所成的角.



在 $\mathrm{Rt}\triangle PAB$ 中,$AB=PA$,故 $\angle APB=45°$.

所以 PB 和平面 PAD 所成的角的大小为 $45°$. ………………………… 4 分

(2)证明:在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,

因 $PA\perp$ 底面 $ABCD$,$CD\subset$ 平面 $ABCD$,故 $CD\perp PA$.

由条件 $CD\perp AC$,$PA\cap AC=A$,$\therefore CD\perp$ 面 PAC.又 $AE\subset$ 面 PAC,$\therefore AE\perp CD$.

由 $PA=AB=BC$,$\angle ABC=60°$,可得 $AC=PA$.$\because E$ 是 PC 的中点,$\therefore AE\perp PC$,

$\because PC\cap CD=C$.综上得 $AE\perp$ 平面 PCD. ………………………… 8 分

(3)过点 E 作 $EM\perp PD$,垂足为 M,连结 AM.由(2)知,$AE\perp$ 平面 PCD,AM 在平面 PCD 内的射影是 EM,则 $AM\perp PD$.

因此 $\angle AME$ 是二面角 $A\text{-}PD\text{-}C$ 的平面角.由已知,得 $\angle CAD=30°$.设 $AC=a$,得

$PA=a$,$AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$,$PD=\frac{\sqrt{21}}{3}a$,$AE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADP$ 中,$\because AM\perp PD$,$\therefore AM\cdot PD=PA\cdot AD$,则

$AM=\dfrac{PA\cdot AD}{PD}=\dfrac{a\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a}{\dfrac{\sqrt{21}}{3}a}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}a$.在 $\mathrm{Rt}\triangle AEM$ 中,$\sin\angle AME=\dfrac{AE}{AM}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$. …………… 12 分

15. **解析:**(1)$f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x=2(\dfrac{1}{2}\sin\omega x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x)=2\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})$, ……… 2 分

$\because f(x)$图象上一个最高点的坐标为$(\dfrac{\pi}{12},2)$,与之相邻的一个最低点的坐标为$(\dfrac{7\pi}{12},-2)$,

$\therefore \dfrac{T}{2}=\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}$,$\therefore T=\pi$, …………………………………………………………………… 4 分

于是 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$. $\therefore f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ …………………………………………………………… 6 分

(2)$\because a^2+c^2-b^2=ac$,$\therefore \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$, ……………………………………………………… 8 分

又 $0<B<\pi$, $\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$,$\therefore f(A)=2\sin(2A+\dfrac{\pi}{3})$, ……………………………………………………… 10 分

$\because B=\dfrac{\pi}{3}$,$\therefore 0<A<\dfrac{2\pi}{3}$,于是$\dfrac{\pi}{3}<2A+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5\pi}{3}$,$\sin(2A+\dfrac{\pi}{3})\in[-1,1]$,

所以$f(A)\in[-2,2]$. ………………………………………………………………………………… 14 分

16. **解析:**(1)由$f'(2)=-\dfrac{a}{2}=1$,得 $a=-2$ ……………………………………………………………………… 2 分

(2)由(1)知,$f(x)=-2\ln x+2x-3$,$f'(x)=2-\dfrac{2}{x}$, …………………………………………………………… 4 分

故 $g(x)=x^3+(2+\dfrac{m}{2})x^2-2x$,$g'(x)=3x^2+(m+4)x-2$ ………………………………………………… 6 分

由 $g'(x)$图象知,$\begin{cases}g'(t)<0\\g'(3)>0\end{cases}$,解得:$-\dfrac{37}{3}<m<-9$ ………………………………………………… 8 分

(3)$\because a=2$,$\therefore f(x)=2\ln x-2x-3$,令 $F(x)=h(x)-f(x)=px-\dfrac{p+2e}{x}-2\ln x$

则 $F'(x)=\dfrac{px^2-2x+p+2e}{x^2}$, ………………………………………………………………………… 10 分

①若 $p\leqslant 0$,由于 $px-\dfrac{p}{x}\leqslant 0,-\dfrac{2\mathrm{e}}{x}-2\ln x<0\Rightarrow F(x)<0$ 所以不存在 x_0 使得 $h(x_0)>f(x_0)$ …… 12 分

②若 $p>0$,此时 $F'(x)=\dfrac{px^2+p+2(e-x)}{x^2}>0$,所以 $F(x)$在$[1,e]$上是增函数,

$\therefore F(x)_{\max}=F(e)=pe-\dfrac{p}{e}-4$,只要 $pe-\dfrac{p}{e}-4>0$ 即可,解得 $p>\dfrac{4e}{e^2-1}$, ……………………… 14 分

即 $p\in\left(\dfrac{4e}{e^2-1},+\infty\right)$ ………………………………………………………………………… 16 分

17. **解析:**(1)设 d、q 分别为等差数列$\{a_n\}$、等比数列$\{b_n\}$的公差与公比,且 $d>0$

由 $a_1=1,a_2=1+d,a_3=1+2d$,分别加上 1,1,3 有 $b_1=2,b_2=2+d,b_3=4+2d$ …………………… 3 分

$(2+d)^2=2(4+2d),d^2=4,\because d>0,\therefore d=2,q=\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{4}{2}=2$ ………………………………… 6 分

$\therefore a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1,b_n=2\times 2^{n-1}=2^n$ ………………………………………………… 8 分

(2)$T_n=\dfrac{a_1}{b_1}+\dfrac{a_2}{b_2}+\cdots+\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$,①

$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{5}{2^4}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}$②…………………………………………………… 10 分

①-②,得

$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2}+2\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)-\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}$ ………………………………………………… 14 分

$\therefore T_n=1+\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n-1}}}{1-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{2n-1}{2^n}=3-\dfrac{1}{2^{n-2}}-\dfrac{2n-1}{2^n}=3-\dfrac{2n+3}{2^n}$.

$\therefore T_n+\dfrac{2n+3}{2^n}-\dfrac{1}{n}=3-\dfrac{1}{n}<3$. …………………………………………………………… 16 分

$\because \left(3-\dfrac{1}{n}\right)$ 在 $\mathbf{N}^*$ 是单调递增的,

$\therefore (3-\dfrac{1}{n})\in[2,3)$

$\therefore$ 满足条件 $T_n+\dfrac{2n+3}{2^n}-\dfrac{1}{n}<c(c\in \mathbf{Z})$恒成立的最小整数值为 $c=3$. ………………………… 18 分

18. **解析**:(1)依题意:$A(-a,0)$,$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,设 $P(s,t)$,

由$\overrightarrow{PA}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{PF_1}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PF_2}$得:$(-a-s,-t)=\dfrac{3}{2}(-c-s,-t)-\dfrac{1}{2}(c-s,-t)$ ………………………… 2 分

即$-a-s=\dfrac{3}{2}(-c-s)-\dfrac{1}{2}(c-s)$,$a=2c$,

所以椭圆的离心率是$\dfrac{1}{2}$. ………………………… 4 分

(2)不妨设$|PF_1|<|PF_2|$,由 $F_1F_2=2c$,及$\triangle PF_1F_2$ 的三边构成公差为 1 的等差数列,再结合 $a=2c$ 得:

$|PF_1|=2c-1$,$|PF_2|=2c+1$,

所以$\begin{cases} s^2+t^2=28 & ① \\ (s+c)^2+t^2=(2c-1)^2 & ② \\ (s-c)^2+t^2=(2c+1)^2 & ③ \end{cases}$ ………………………… 8 分

① × 2 − ② − ③得:$c^2=9$,所以椭圆方程是$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$. ………………………… 10 分

(3)椭圆方程是$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$,设 $P(s,t)$,则$\dfrac{s^2}{4}+\dfrac{t^2}{3}=1$,$s^2=4-\dfrac{4t^2}{3}$,

以椭圆长轴为直径的圆的圆心为(0,0),半径为 2,

设$\triangle PF_1F_2$ 的外接圆方程是 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,

又 F_1,F_2 关于 y 轴对称,故 $D=0$,即圆方程为 $x^2+y^2+Ey+F=0$,

由 $F_1(-1,0)$和 $P(s,t)$在圆上得:

$$\begin{cases} 1+F=0 \\ s^2+t^2+Et+F=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F=-1 \\ E=-\dfrac{s^2+t^2-1}{t}=\dfrac{t^2-9}{3t} \end{cases}$$

则圆心坐标为 $M(0,-\frac{E}{2})$,半径为 $r=\frac{\sqrt{E^2-4F}}{2}=\frac{\sqrt{E^2+4}}{2}$ ………………………………………… 14 分

$\triangle PF_1F_2$ 的外接圆与以椭圆长轴为直径的圆只有一个公共点,即两圆相切,且是内切,

即 $OM=|2-r|$

$\frac{|E|}{2}=2-\frac{\sqrt{E^2+4}}{2}$ 或 $\frac{|E|}{2}=\frac{\sqrt{E^2+4}}{2}-2$(此方程无解)

解得:$|E|=\frac{3}{2}$, ………………………………………………………………………………………… 16 分

由 $\frac{t^2-9}{3t}=\frac{3}{2}$ 得:$2t^2-9t-18=0$,$t=-\frac{3}{2}$(舍去)或 $t=-6$(舍去)

由 $\frac{t^2-9}{3t}=-\frac{3}{2}$ 得:$2t^2+9t-18=0$,$t=\frac{3}{2}$ 或 $t=-6$(舍去),$\therefore$ 点 P 坐标为 $(1,\frac{3}{2})$. ……………… 20 分

法二:由题 $\triangle PF_1F_2$ 的外接圆圆心必在 y 轴上,设其圆心为 $M(0,m)$,半径为 r,则 ,

$$\begin{cases} 3s^2+4t^2=12 \\ r^2=m^2+1=(s-0)^2+(t-m)^2 \\ |m|=2-r \end{cases}$$

由题 $s,t,m,r>0$,从而解得 $\begin{cases} r=\frac{5}{4} \\ m=\frac{3}{4} \end{cases}$;$\begin{cases} t=\frac{3}{2} \\ s=1 \end{cases}$

所以点 P 坐标为 $(1,\frac{3}{2})$