

2013年全国中学生数学能力竞赛初三组(样题)



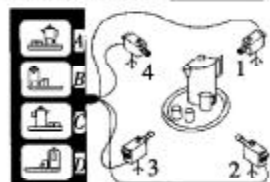
(试题总分:120分 答题时间:120分钟)

一、画龙点睛(本大题共8道小题,每小题3分,总计24分)

- 在实数范围内定义运算“ $\star$ ”,其规则为 $a \star b = a^2 - b^2 - b$,则方程 $(4 \star 3) \star x = 14$ 的解 $x =$ _____.
- 若分式 $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1}$ 的值为0,则 x 的值为_____.
- 若 $|2008 - a| + \sqrt{a - 2009} = a$,则 $a - 2008^2 =$ _____.
- 现代社会对破译密码的难度要求越来越高.现在有一种密码把英文的明文按字母表顺序(真实文)的规则沿曲线*l*对折,该字母则转换为与其所在格重合的那个格中的字母(不区分大小写).例如: $b \rightarrow o$, $x \rightarrow h$.

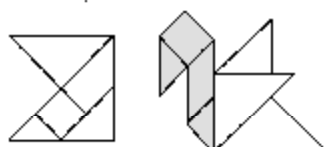
<i>l</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>
	<i>a</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	

- 按此规则将密文 *angul* 转换为明文,应该是_____.
- 若10名游客在乘坐汽车,要求每辆汽车乘坐的人相等.如果每辆汽车乘28人,那么剩下一人未上车;如果减少一辆汽车,那么所有乘客正好能平均分乘到各辆汽车上.已知每辆汽车最多容纳35人,则有游客_____人.
 - 如图,电视台的摄像机1,2,3,4在不同位置拍摄了四幅画面,则A图像是_____号摄像机所拍,B图像是_____号摄像机所拍,C图像是_____号摄像机所拍,D图像是_____号摄像机所拍.

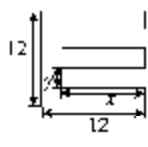


(第6题图)

- 符号“ f ”表示一种运算,它对一些数的运算结果如下:
(1) $f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 3, \dots$
(2) $f(\frac{1}{2}) = 2, f(\frac{1}{3}) = 3, f(\frac{1}{4}) = 4, f(\frac{1}{5}) = 5, \dots$
利用以上规律计算: $f(\frac{1}{2008}) - f(2008) =$ _____.
- 如图,用边长为1的正方形纸板制成一副七巧板,将它拼成“小人”图案,其中阴影部分面积为_____.



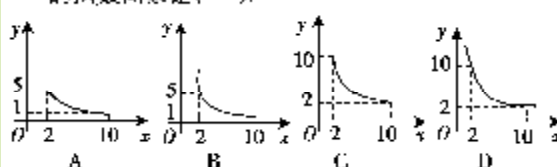
(第8题图)



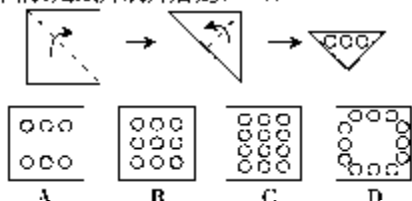
(第10题图)

二、一锤定音(本大题共4道小题,每小题3分,总计12分)

- 已知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{5}{a+b}$,则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 的值是().
A. 5 B. 7 C. 3 D. $\frac{1}{3}$
- 如图,一张正方形的纸片,剪去两个一样的小矩形得到一个“E”图案,设小矩形的长和宽分别为 x, y ,剪去部分的面积为20,若 $2 \leq x \leq 10$,则 y 与 x 的两函数图象是().



- 如图,将一张正方形纸片对折两次,然后在上边打3个洞,则纸片展开后是().



(第11题图)

- 已知 $a = \sqrt{2} - 1, b = 2\sqrt{6} - 6, c = \sqrt{6} - 2$,则的 a, b, c 大小关系是().
A. $a < b < c$ B. $b < a < c$
C. $c < b < a$ D. $c < a < b$

三、妙笔生花(本大题共4道小题,13题6分,14题7分,15题9分,16题8分,总计30分)

- 你能用所学知识解方程 $2x^2 + 5|x| - 12 = 0$ 吗?请试一试.

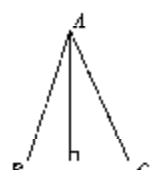
- 已知 $abc \neq 0$,并 $\frac{a-b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = p$,那么直线 $y = px + p$ 一定通过哪几个象限?

- 如图,已知 $A(-4, n), B(2, -4)$ 是反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象与一次函数 $y = kx + b$ 的图象的两个交点.
(1)求反比例函数和一次函数的解析式;
(2)求直线 AB 与 x 轴的交点 C 的坐标及 $\triangle AOB$ 的面积.



(第15题图)

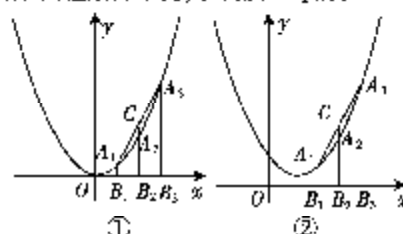
- 如图,在 $\triangle ABC$ 中,已知 $\angle BAC = 45^\circ, AD \perp BC$,垂足为 $D, BD = 2, DC = 3$,求 AD 的长.
小萍同学灵活运用轴对称知识,将图形进行轴对称变换,巧妙地解答了此题.
请按照小萍的思路,探究并解答下列问题:
(1)分别以 AB, AC 所在的直线为对称轴,画出 $\triangle ABD, \triangle ACD$ 的轴对称图形 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$,延长 EF, FC 相交于点 G ,证明四边形 $AECF$ 是正方形;
(2)设 $AD = x$,利用勾股定理,建立关于 x 的方程模型,求出 x 的值.



(第16题图)

四、一鼓作气(本大题共2道小题,每小题12分,总计24分)

- 已知 A_1, A_2, A_3 是抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上的三点, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 分别垂直于 x 轴,垂足为 B_1, B_2, B_3 ,直线 A_1B_2 交线段 A_2A_3 于点 C .
(1)如图①,若 A_1, A_2, A_3 三点的横坐标依次为1, 2, 3,求线段 CA_2 的长;
(2)如图②,若将抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 改为抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$, A_1, A_2, A_3 三点的横坐标为连续整数,其他条件不变,求线段 CA_2 的长.



(第17题图)

- 某航空公司经营 A, B, C, D 这四座城市之间的客运业务.他们的部分机票如下: $A \rightarrow B$ 为2000元; $A \rightarrow C$ 为1600元; $A \rightarrow D$ 为2500元; $B \rightarrow C$ 为1200元; $C \rightarrow D$ 为900元.现在已知这家公司所规定的机票价格是往返之间的直线距离成正比的.你知道 $B \rightarrow D$ 的机票价格是多少吗?

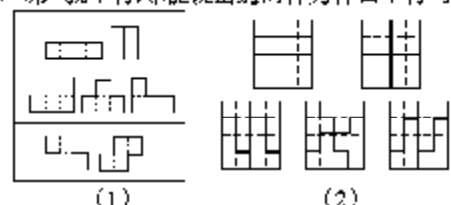
五、再接再厉(本大题总计15分)

- 一天,华生请福尔摩斯到他家做客.他们坐在开着的窗户旁边聊天,从庭院里传来了一群孩子的嬉笑声.福尔摩斯:“请告诉我,您有几个孩子?”华生诡秘地笑了笑,回答道:“这些孩子不完全都是我家的.一共是3家的孩子.我还知道这群孩子中约翰、彼得、保罗分别带着自己的妹妹多妮、罗斯、莉莉刚从超市购物回来,至于谁是谁的妹妹就不知道了,你只能从下列条件来推测:他们6人,每人花在买商品的钱数(单位:英镑)正好等于商品数量的平方,可也真巧,每位哥哥都比自己的妹妹多花48英镑,又已知约翰比罗斯多买9件商品,彼得比珍妮多买了7件商品.试问:究竟谁是谁的妹妹呢?”



六、马到成功(本大题总计15分)

- 你一定玩过俄罗斯方块吧!俄罗斯方块是一种有趣的电子游戏,由四个小正方形拼成的方块一个接一个地向下掉.你的任务是让它们下落的过程中及时调整它们的方位,以使它们在落到屏幕底部时能严丝合缝,不致堆得很高.
你注意过没有,俄罗斯方块只有七种形状,如图(1)所示.单用一种形状的俄罗斯方块,可以拼成一个 4×4 (以拼成俄罗斯方块的小正方形的边长为单位长度)的正方形吗?图(1)横线上的五种俄罗斯方块都可以拼成一个 4×4 的正方形.如图(2)所示,但是图(1)横线下面的两种“左二”形和“右二”形就不行.你能说出这两种为什么不行吗?



(第20题图)

(参考答案见下期)

责任编辑:王峰

美术编辑:李

电脑排版:程素兰

天仁报业集团广告公司以集团多种产品为宣传媒介,以报纸、图书的巨大发行量和网络资源为依托,集中宣传与师生学习和生活息息相关的各类产品.欢迎广大广告主,并诚招集团各类产品经销商和地区代理商! 广告许可证号:220004435006 广告投版热线:0435-3940706 传真:0435-3940563 联系人:程素兰 电子邮箱:16095543@qq.com

一、画龙点睛

1. 1 或 -2 2. 2 3. 2009 4. maths
5. 841 6. 2, 3, 4, 1 7. 1 8. $\frac{3}{8}$

二、一锤定音

9. C 10. A 11. D 12. B

三、妙笔生花

13. $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}$.

14. 由已知有 $\begin{cases} a+b=pc, \\ b+c=pa, \\ a+c=pb. \end{cases}$ 三式相加, 得 $2(a+b+c) = p(a+b+c)$. 所以有 $p=2$ 或 $a+b+c=0$. 当 $p=2$ 时, $y=2x+2$, 则直线

通过第一、二、三象限; 当 $a+b+c=0$ 时, 不妨取 $a+b=-c$, 于是 $p = \frac{a+b}{c} = -1$ ($c \neq 0$), 所以 $y = -x - 1$. 则直线通过第二、三、四象限. 综上所述, 直线一定通过第二、三象限.

15. (1) 反比例函数的解析式为 $y = -\frac{8}{x}$;

一次函数的解析式为 $y = -x - 2$;
(2) $\because C$ 是直线 AB 与 x 轴的交点, $\therefore$ 令 $y = 0$, 则 $x = -2$.
 $\therefore$ 点 C 的坐标为 $(-2, 0)$. $\therefore OC = 2$.

$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 6$.

16. (1) 证明: 图形如图 1 所示, 则 $\triangle ABD \cong \triangle ABE$, $\triangle ACD \cong \triangle ACF$. $\therefore \angle DAB = \angle EAB$, $\angle DAC = \angle FAC$. $\because \angle BAC = 45^\circ$, $\therefore \angle EAF = 90^\circ$. $\because AD \perp BC$, $\therefore \angle E = \angle ADB = 90^\circ$, $\angle F = \angle ADC = 90^\circ$. $\therefore$ 四边形 $AEGF$ 是矩形. 又 $\because AE = AD$, $AF = AC$, $\therefore AE = AF$. $\therefore$ 矩形 $AEGF$ 是正方形;

(2) 设 $AD = x$, 则 $AE = EG = GF = x$. $\because BD = 2, DC = 3$, $\therefore BE = 2, CF = 3$. $\therefore BG = x - 2, CG = x - 3$. 在 $\text{Rt} \triangle BCG$ 中, $BC^2 + CG^2 = BG^2$, $\therefore (x-2)^2 + (x-3)^2 = 5^2$. 整理, 得 $x^2 - 5x - 6 = 0$. 解得 $x_1 = 6, x_2 = -1$ (舍去). $\therefore AD = 6$.

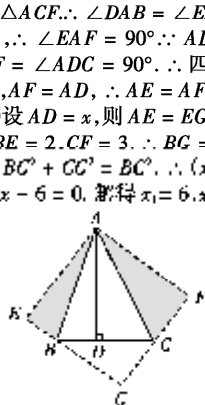


图 1

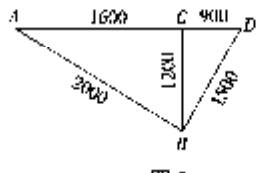


图 2

四、一鼓作气

17. (1) $\because A_1, A_2, A_3$ 三点的横坐标依次为 1, 2, 3, $\therefore A_1B_1 = \frac{1}{2} \times$

$1^2 = \frac{1}{2}, A_2B_2 = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2, A_3B_3 = \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{9}{2}$. 由已知

可得 $A_1B_1 \parallel A_3B_3$, $\therefore CB_2 = \frac{1}{2}(A_1B_1 + A_3B_3) = \frac{5}{2}$.

$\therefore CA_2 = CB_2 - A_2B_2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$;

(2) 设 A_1, A_2, A_3 三点的横坐标依次为 $n-1, n, n+1$.
则 $A_1B_1 = \frac{1}{2}(n-1)^2 - (n-1) + 1$,

$A_2B_2 = \frac{1}{2}n^2 - n + 1, A_3B_3 = \frac{1}{2}(n+1)^2 - (n+1) + 1$.

由已知可得 $A_1B_1 \parallel A_3B_3$,
 $\therefore CB_2 = \frac{1}{2}(A_1B_1 + A_3B_3) = \frac{1}{2}n^2 - n + \frac{3}{2}$. $\therefore CA_2 = CB_2 -$

$A_2B_2 = \frac{1}{2}n^2 - n + \frac{3}{2} - (\frac{1}{2}n^2 - n + 1) = \frac{1}{2}$.

18. 由于机票价格与城市间的直线距离成正比, 因此可以用

票价来作为城市间的距离. 如图 2, 首先画出城市 A, B, C . 它们形成 $\triangle ABC$, 其中 AB 的长度即城市 A, B 的机票价格为 2000, 同理, BC 长 1200, AC 长 1600. 注意 $1200^2 + 1600^2 = 2000^2$, 即 $BC^2 + AC^2 = AB^2$. 根据勾股定理的逆定理, 可知 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 即 $\angle ACB$ 是直角, AB 是斜边. 因此,

在 $\text{Rt} \triangle BCD$ 中, $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{900^2 + 1200^2} = 1500$. 即 $B-D$ 的机票价格是 1500 元.

五、再接再厉

19. 设一家兄妹中, 哥哥买了 x 件商品, 妹妹买了 y 件商品. 于是有 $x^2 - y^2 = 48$, 即 $(x+y)(x-y) = 48$. 可得 $x = 13, y = 11$ 或 $x = 8, y = 4$ 或 $x = 7, y = 1$. 由约翰比罗斯多买 9 件商品, 可知约翰买了 13 件商品, 罗斯买了 4 件; 由彼得比珍妮多买了 7 件商品, 可知彼得买了 8 件, 珍妮买了 1 件; 所以保罗买了 7 件, 凯莉买了 11 件. 由此可知三对兄妹的组合是约翰和凯莉、彼得和罗斯、保罗和珍妮.

六、马到成功

20. 如果一个 4×4 的正方形可单用“左二二形”拼成, 那么在这个正方形内, 占据了它左上角位置的那个“左二二形”, 只能以图 3 所示的方式放置.

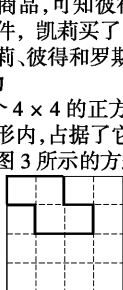


图 3

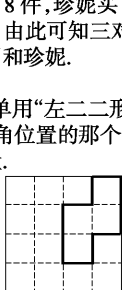


图 4

同理, 占据它右上角位置的那个“左二二形”, 只能以图 4 所示的方式放置.

这样, 这两个“左二二形”就发生了重叠, 但又不能合二为一. 因此, 单用“左二二形”不能拼成一个 4×4 的正方形的. 同理可证明“右二二形”也不能拼成一个 4×4 的正方形.