2013 年全国中学生数学能力竞赛高二组(样题)

满分:150 分　　时间:120 分钟

基础能力部分(共 60 分,每题 5 分)

一、运算求解能力

1. 已知$\triangle ABC$的三个内角A、B、C所对应的边分别为a,b,c,且$A=\frac{\pi}{3}$,$a=\sqrt{3}$,$b=1$,则角B等于　(　　)

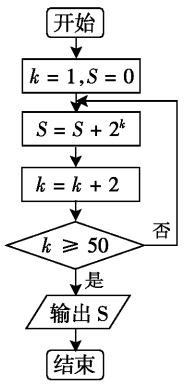
A. $\frac{\pi}{2}$　B. $\frac{\pi}{6}$　C. $\frac{5\pi}{6}$　D. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$

2. 设等差数列$\{a_n\}$的首项及公差均是正整数,前n项和为S_n,且$a_1>1$,$a_4>6$,$S_3\leqslant 12$,则$a_{2012}=$______.

3. 若直线l过点$A(-1,3)$,且与直线$x-2y-3=0$垂直,则直线l的方程为________.

二、数据处理能力

4. 执行如图所示的程序框图,输出的S值为　(　　)



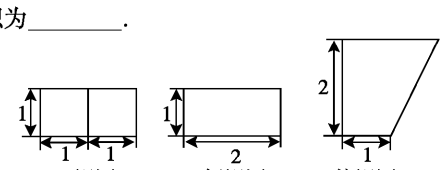
A. $\frac{2}{3}(4^{25}-1)$　　B. $\frac{2}{3}(4^{26}-1)$

C. $2^{50}-1$　　D. $2^{51}-1$

5. 某单位有职工 52 人,现将所有职工随机编号,用系统抽样的方法抽取一个容量为 4 的样本,已知 6 号、32 号、45 号职工在样本中,则样本中还有一个职工的编号是________.

三、空间想象能力

6. 一个几何体的三视图如图所示,则这个几何体的体积为________.

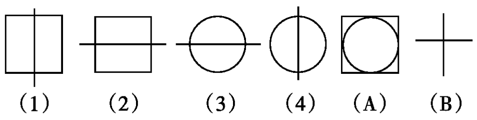


正视图　　侧视图　　俯视图

四、抽象概括能力

7. 设函数$f(x)=\begin{cases}-1 & -2\leqslant x\leqslant 0\\ x & -10<x\leqslant 2\end{cases}$若函数$g(x)=f(x)-ax$,$x\in[-2,2]$为偶函数,则实数$a$的值为________.

8. 定义$A*B$,$B*C$,$C*D$,$D*A$的运算分别对应如图中的(1)、(2)、(3)、(4),那么下图中的(A)、(B)所对应的运算结果可能是　(　　)



A. $B*D$,$A*D$　　B. $B*D$,$A*C$

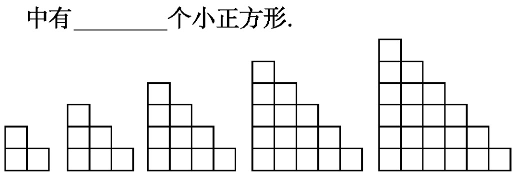
C. $B*C$,$A*D$　　D. $C*D$,$A*D$

五、推理论证能力

9. 观察下列等式,$1^3+2^3=3^2$,$1^3+2^3+3^3=6^2$,$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$根据上述规律,$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3=$　(　　)

A. 19^2　B. 20^2　C. 21^2　D. 22^2

10. 观察下列的图形中小正方形的个数,则第n个图中有_______个小正方形.



六、实践能力

11. 一个商人有一批货,如果月初售出可获利 1 000 元,再将收益都存入银行,已知银行月息为 2.4%. 如果月末售出可获利 1 200 元,但要付 50 元货物保管费. 这个商人若要获得最大收益,则这批货　(　　)

(注:收益 = 利润 + 成本 - 保管费)

A. 月初售出好

B. 月末售出好

C. 月初或月末一样

D. 由成本费的大小确定出售时机

七、创新意识

12. 设S为复数集C的非空子集.若对任意$x,y\in S$,都有$x+y,x-y,xy\in S$,则称S为封闭集.下列命题:

①集合$S=\{a+b\sqrt{3}\mid(a,b\text{为整数})\}$为封闭集;

②若S为封闭集,则一定有$0\in S$;

③封闭集一定是无限集;

④若S为封闭集,则满足$S\subseteq T\subseteq C$的任意集合T也是封闭集.

其中真命题是_______(写出所有真命题的序号)

综合能力部分(共 90 分)

13. (10 分)已知集合$A=\{x\mid x^2-2x-8\leqslant 0\}$,$B=\{x\mid x^2-(2m-3)x+m^2-3m\leqslant 0,m\in\mathbf{R}\}$

(1)若$A\cap B=[2,4]$,求实数m的值;

(2)设全集为R,若$A\subseteq C_RB$,求实数m的取值范围.

14. (10 分)已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2x-\frac{1}{2}$,$(x\in\mathrm{R})$

(1)求函数$f(x)$的最大值和最小正周期;

(2)设$\triangle ABC$的内角A、B、C的对边分别是a、b、c,且$c=3$,$f(C)=0$,若$\sin(A+C)=2\sin A$,求a、b的值.

15. (16 分)已知$f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的增函数,且$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$,$f(2)=1$,解不等式$f(x)-f(\frac{1}{x-3})\leqslant 2$.

16. (16 分)已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2+4n(n\in\mathbf{N}^*)$,数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$,$b_{n+1}=2b_n+1$

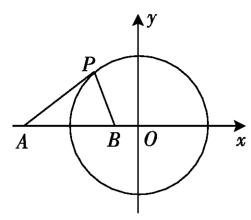
(1)求数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$通项公式;

(2)设$c_n=\frac{(a_n-3)(b_n+1)}{2}$,求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$.

17. (18 分)已知圆$C:x^2+y^2=9$,点$A(-5,0)$,直线$l:x-2y=0$.

(1)求与圆C相切,且与直线l垂直的直线方程;

(2)在直线OA上(O为坐标原点),存在定点B(不同于点A),满足:对于圆C上任一点P,都有$\frac{PB}{PA}$为一常数,试求所有满足条件的点B的坐标.



18. (20 分)已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$满足$2a_{n+1}^2+3a_{n+1}a_n-2a_n^2=0(n\in\mathbf{N}^*)$,且$a_3+\frac{1}{32}$是$a_2$,$a_4$的等差中项.数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n=n^2$.

(1)求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式;

(2)若$T_n=\frac{1}{b_1b_2}+\frac{1}{b_2b_3}+\cdots+\frac{1}{b_nb_{n+1}}$,求证:$T_n<\frac{1}{2}$.

(3)若$c_n=-\frac{\log_{\frac{1}{2}}a_n}{a_n}$,$T_n'=c_1+c_2+\cdots+c_n$,求使$T_n'+n\cdot 2^{n+1}>125$成立的正整数$n$的最小值.

2013 年全国中学生数学能力竞赛高二组（样题）参考答案

基础能力部分

1. B

2. 4024

3. $2x + y - 1 = 0$

4. A

5. 19

6. 3

7. $\frac{1}{2}$

8. C

9. C

10. $\frac{n^2 + 3n + 2}{2}$

11. D

解析：设这批货成本为 a 元，月初售出可收益 $y_1 = (a + 1000) \times (1 + 2.4\%)$(元)，

月末售出可收益 $y_2 = a + 1200 - 50 = a + 1150$(元).

则 $y_1 - y_2 = (a + 1000) \times 1.024 - a - 1150 = 0.024a - 126$.

当 $a > \frac{126}{0.024} = 5250$ 时，月初售出好；

当 $a < 5250$ 时，月末售出好；

当 $a = 5250$ 时，月初、月末收益相等，但月末售出还要保管一个月，应选择月初售出.

12. ①②

综合能力部分

13. 解析：(1) $\because A = [-2,4], B = [m-3, m]$，$A \cap B = [2,4]$，

$\therefore \begin{cases} m - 3 = 2 \\ m \geq 4 \end{cases} \quad \therefore m = 5$

(2) $C_R B = \{x \mid x < m - 3, 或\ x > m\}$，$\because A \subseteq C_R B$

$\therefore m < -2$，或 $m - 3 > 4$，$\therefore m > 7$ 或 $m < -2$

14. **解析**：(1) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) - \frac{1}{2} = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) - 1$，$f(x)$ 的最大值为 0；最小正周期为 π.

(2) $f(C) = \sin(2C - \frac{\pi}{6}) - 1 = 0$，解得 $C = \frac{\pi}{3}$；

又 $\because \sin(A + C) = \sin B = 2\sin A$，

由正弦定理 $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ ①，

由余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{3}$，

即 $a^2 + b^2 - ab = 9$ ②

由①②解得：$a = \sqrt{3}$，$b = 2\sqrt{3}$.

15. **解析**：$2 = f(2) + f(2)$，而 $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$，

可变形为 $f(y) + f(\frac{x}{y}) = f(x)$，

令 $y = 2$，$\frac{x}{y} = 2$，即 $x = 2y = 4$，

则有 $f(2) + f(2) = f(4)$，$\therefore 2 = f(4)$.

$\therefore f(x) - f(\frac{1}{1-3}) \leq 2$ 变形为 $f[x(x-3)] \leq f(4)$.

又 $\because f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的增函数，

$\therefore \begin{cases} x(x-3) \leq 4, \\ x > 0, \\ x - 3 > 0, \end{cases}$ 解得 $3 < x \leq 4$.

$\therefore$ 原 不等式的解集为 $\{x \mid 3 < x \leq 4\}$.

16. **解析**：由 $S_n = n^2 + 4n$，

当 $n = 1$ 时，$a_1 = S_1 = 5$；

当 $n \geq 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 4n - (n-1)^2 - 4(n-1) = 2n + 3$.

$\therefore$ 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时，$a_n = 2n + 3$.

又 $b_{n+1} = 2b_n + 1$，$b_1 = 1$，即 $b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$，可得 $\frac{b_{n+1} + 1}{b_n + 1} = 2$，

$\therefore$ 数列 $\{b_{n+1}\}$ 是以 2 为首项，以 2 为公比的等比数列，

$\therefore b_n + 1 = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$，即 $b_n = 2^n - 1$.

(II) 由(1)得 $c_n = n \cdot 2^n$.

$T_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + A + n \cdot 2^n$，

$2T_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + A + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$，

由 $T_n - 2T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + A + 2^n - n \cdot 2^{n+1}$，

得 $-T_n = \frac{2(1 - 2^n)}{1 - 2} - n \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1} - 2 - n \cdot 2^{n+1}$，

$\therefore T_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$.

17. **解**：(1) 设所求直线方程为 $y = -2x + b$，即 $2x + y - b = 0$，

Q 直线与圆相切，$\therefore \frac{|-b|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 3$，得 $b = \pm 3\sqrt{5}$，

$\therefore$ 所求直线方程为 $y = -2x \pm 3\sqrt{5}$

(2) 方法 1：假设存在这样的点 $B(t, 0)$，

当 P 为圆 C 与 x 轴左交点 $(-3,0)$ 时，$\frac{PB}{PA} = \frac{|t+3|}{2}$；

当 P 为圆 C 与 x 轴右交点 $(3,0)$ 时，$\frac{PB}{PA} = \frac{|t-3|}{8}$，

依题意，$\frac{|t+3|}{2} = \frac{|t-3|}{8}$，

解得，$t = -5$(舍去)，或 $t = -\frac{9}{5}$

下面证明点 $B(-\frac{9}{5}, 0)$ 对于圆 C 上任一点 P，都有 $\frac{PB}{PA}$ 为一常数.

设 $P(x, y)$，则 $y^2 = 9 - x^2$，

$\therefore \frac{PB^2}{PA^2} = \frac{(x + \frac{9}{5})^2 + y^2}{(x+5)^2 + y^2} = \frac{x^2 + \frac{18}{5}x + \frac{81}{25} + 9 - x^2}{x^2 + 10x + 25 + 9 - x^2}$

$= \frac{\frac{18}{25}(5x + 17)}{2(5x + 17)} = \frac{9}{25}$，

从而 $\frac{PB}{PA} = \frac{3}{5}$ 为常数.

方法 2：假设存在这样的点 $B(t, 0)$，使得 $\frac{PB}{PA}$ 为常数 λ，则 $PB^2 = \lambda^2 \cdot PA^2$，

$\therefore (x - t)^2 + y^2 = \lambda^2[(x+5)^2 + y^2]$，将 $y^2 = 9 - x^2$ 代入得，

$x^2 - 2xt + t^2 + 9 - x^2 = \lambda^2(x^2 + 10x + 25 + 9 - x^2)$，即

$2(5\lambda^2 + t)x + 34\lambda^2 - t^2 - 9 = 0$ 对 $x \in [-3, 3]$ 恒成立，

$\therefore \begin{cases} 5\lambda^2 + t = 0, \\ 34\lambda^2 - t^2 - 9 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \lambda = \frac{3}{5} \\ t = -\frac{9}{5} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \lambda = 1 \\ t = -5 \end{cases}$ (舍去)，

所以存在点 $B(-\frac{9}{5}, 0)$ 对于圆 C 上任一点 P，都有 $\frac{PB}{PA}$ 为常数 $\frac{3}{5}$.

18. **解析**：(1) $\because 2a_{n+1}^2 + 3a_{n+1}a_n - 2a_n^2 = 0$，

$\therefore (a_{n+1} + 2a_n)(2a_{n+1} - a_n) = 0$，

$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，

$\therefore a_{n+1} + 2a_n > 0$，$\therefore 2a_{n+1} - a_n = 0$，即 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n (n \in \mathbf{N}^*)$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

$\because a_3 + \frac{1}{32}$ 是 a_2, a_4 的等差中项，$\therefore a_2 + a_4 = 2a_3 + \frac{1}{16}$，

即 $a_1 q + a_1 q^3 = 2a_1 q^2 + \frac{1}{16}$，

$\therefore \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{8}a_1 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{16}$，$\therefore a_1 = \frac{1}{2}$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{1}{2^n}$.

当 $n = 1$ 时，$b_1 = S_1 = 1$；

当 $n \geq 2$ 时，$b_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$.

又 $2 \times 1 - 1 = 1$，所以 $b_n = 2n - 1$.

(2) 因为 $T_n = \frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \cdots + \frac{1}{b_n b_{n+1}}$

$= \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$

$= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n+1})$，

所以 $T_n < \frac{1}{2}$.

(3) 由(1)及 $c_n = -\frac{\log_{\frac{1}{2}} a_n}{a_n}$ 得，$c_n = -n \cdot 2^n$.

$\because T_n' = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$，

$\therefore T_n' = -2 - 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^4 - \cdots - n \cdot 2^n$，①

$\therefore 2T_n' = -2^2 - 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^5 - \cdots - (n-1) \cdot 2^n - n \cdot 2^{n+1}$，②

② − ①得，$T_n' = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} = \frac{2(1 - 2^n)}{1 - 2} - n \cdot 2^{n+1} = (1 - n) \cdot 2^{n+1} - 2$.

要使 $T_n' + n \cdot 2^{n+1} > 125$ 成立，只需 $2^{n+1} - 2 > 125$ 成立，即 $2^{n+1} > 127$，所以 $n \geq 6$.

$\therefore$ 使 $T_n' + n \cdot 2^{n+1} > 125$ 成立的正整数 n 的最小值为 6.